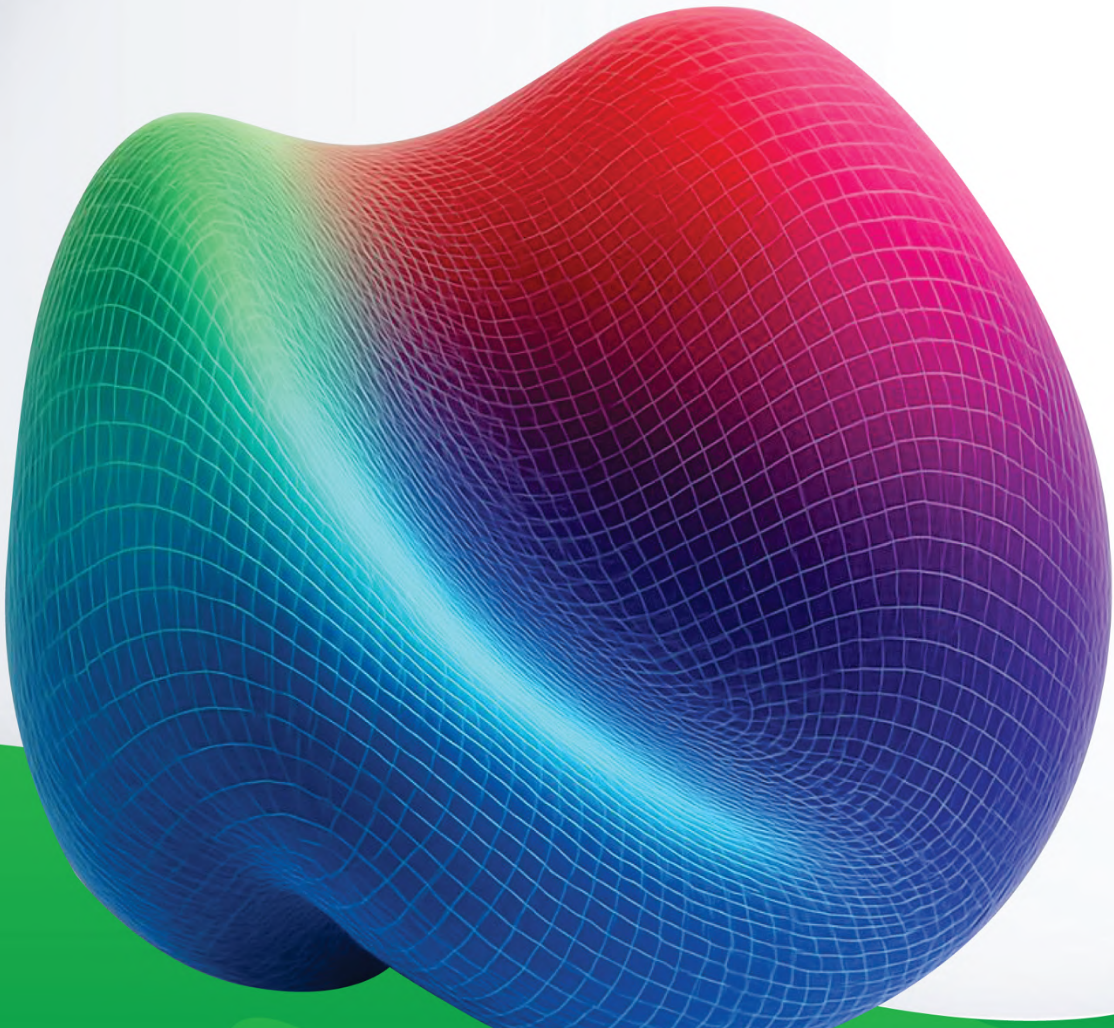
EDITORIAL GRUPO AEA

APLICACIÓN DEL CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL Y DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES

Ponce-Jara, Marcos
Chila-Ortiz, Hernán Vinicio
Puyol-Cortez, Jorge Luis



Grupo de Asesoría Empresarial & Académica
Grupoaea.ecuador
Editorial Grupo AEA

Aplicación del Cálculo Diferencial e Integral y de las Ecuaciones Diferenciales.

Autor/es:

Ponce-Jara, Marcos
Universidad Técnica Luis Vargas Torres de Esmeraldas;
Universidad Laica Eloy Alfaro de Manabí

Chila-Ortiz, Hernán Vinicio
Universidad Técnica Luis Vargas Torres de Esmeraldas

Puyol-Cortez, Jorge Luis
Universidad Técnica Luis Vargas Torres de Esmeraldas

Datos de Catalogación Bibliográfica

Ponce-Jara, M.
Chila-Ortiz, H.V.
Puyol-Cortez, J. L.

Aplicación del Cálculo Diferencial e Integral y de las Ecuaciones Diferenciales
Editorial Grupo AEA, Ecuador, 2026
ISBN: 978-9942-598-16-5
Formato: 210 cm X 270 cm 190 págs.

Publicado por Editorial Grupo AEA
Ecuador, Santo Domingo, Vía Quinindé, Urb. Portón del Río.
Contacto: +593 983652447; +593 985244607
Email: info@editorialgrupo-aea.com
https://www.editorialgrupo-aea.com/

Primera Edición, 2026

Cámara Ecuatoriana del Libro con registro editorial No 708

Disponible para su descarga gratuita en https://www.editorialgrupo-aea.com/

Título del libro:
Aplicación del Cálculo Diferencial e Integral y de las Ecuaciones Diferenciales

Libro Digital, Primera Edición, 2026
Editado, Diseñado, Diagramado y Publicado por Comité Editorial del Grupo AEA, Santo Domingo de los Tsáchilas, Ecuador, 2026

ISBN: 978-9942-598-16-5

doi https://doi.org/10.55813/egaea.l.165

Como citar (APA 7ma Edición):
Ponce-Jara, M., Chila-Ortiz, H. V., & Puyol-Cortez, J. L. (2026). *Aplicación del Cálculo Diferencial e Integral y de las Ecuaciones Diferenciales*. Editorial Grupo AEA. https://doi.org/10.55813/egaea.l.165

Cada uno de los textos de Editorial Grupo AEA han sido sometido a un proceso de evaluación por pares doble ciego externos (double-blindpaperreview) con base en la normativa del editorial.

Revisores:
Lic. Herrera Castrillo Cliffor Jerry, PhD. — Universidad Nacional Autónoma de Nicaragua – Nicaragua

Lic. Riveros Anccasi Daker, PhD. — Universidad Nacional de Huancavelica – Perú

Los libros publicados por **"Editorial Grupo AEA"** cuentan con varias indexaciones y repositorios internacionales lo que respalda la calidad de las obras. Lo puede revisar en los siguientes apartados:

Editorial Grupo AEA

http://www.editorialgrupo-aea.com

Editorial Grupo AeA

editorialgrupoaea

Editorial Grupo AEA

Aviso Legal:

La información presentada, así como el contenido, fotografías, gráficos, cuadros, tablas y referencias de este manuscrito es de exclusiva responsabilidad del/los autor/es y no necesariamente reflejan el pensamiento de la Editorial Grupo AEA.

RESEÑA DE AUTORES

AUTORES

Ponce Jara, Marcos Antonio

Universidad Técnica Luis Varga Torres de Esmeraldas;
Universidad Laica Eloy Alfaro de Manabí

marcos.ponce.jara@utelvt.edu.ec
marcos.ponce@uleam.edu.ec

https://orcid.org/0000-0002-4450-4740

Doctor (PhD) en Tecnologías Industriales, Universidad Nacional de Educación a Distancia (UNED), España, Línea de investigación en Energías Renovables y Sostenibilidad. Master Universitario en Investigación en Ingeniería Eléctrica, Electrónica y Control Industrial, Universidad Nacional de Educación a Distancia (UNED), España. Ingeniero Superior en Automática y Electrónica Industrial, Universidad Politécnica de Cataluña (UPC), España. Ingeniero Técnico en Telecomunicaciones, Universidad Politécnica de Cataluña (UPC), España. Docente Universitario – Carrera de Ingeniería Eléctrica, Facultad de ingeniería, Universidad Laica Eloy Alfaro de Manabí, Ecuador. Docente Invitado – Facultad de Pedagogía – Programa de Maestría. Universidad Técnica Luis Varga Torres de Esmeraldas - Ecuador

Chila Ortiz, Hernán Vinicio

Universidad Técnica Luis Varga Torres de Esmeraldas

hernan.chila@utelvt.edu.ec

https://orcid.org/0000-0002-2855-1942

Magister en Matemática Mención Modelación y Docencia. Universidad Técnica Luis Vargas Torres de Esmeraldas. Magister en Docencia y Desarrollo del Currículo. Universidad Técnica Luis Vargas Torres De Esmeraldas. Doctor en Ciencias de la Educación Mención Enseñanza de la Matemática. Escuela Superior Politécnica de Chimborazo ESPOCH. Licenciado en Ciencias de la Educación Profesor de Segunda Enseñanza en la Especialización de Física y Matemáticas. Universidad Técnica Luis Vargas Torres de Esmeraldas. Docente de la Facultad de la Pedagogía de la Universidad Técnica Luis Vargas Torres de Esmeraldas.

RESEÑA DE AUTORES

AUTORES

Puyol Cortez, Jorge Luis

Universidad Técnica Luis Varga Torres de Esmeraldas

jorge.puyol@utelvt.edu.ec

https://orcid.org/0000-0002-0734-694X

Magister en Gerencia Educativa y Liderazgo Educacional. Universidad Técnica Particular de Loja. Magister en Matemática Mención Modelación y Docencia. Universidad Técnica Luis Vargas Torres de Esmeraldas. Diploma Superior en Pedagogías Innovadoras. Universidad Técnica de Quevedo. Diploma superior en Estadísticas e Investigación, Universidad de Zulia – Venezuela. Doctor en Ciencias de la Educación Mención Enseñanza de la Física. Escuela Superior Politécnica de Chimborazo ESPOCH. Licenciado en Ciencias de la Educación Profesor de Segunda Enseñanza en la Especialización de Física y Matemáticas. Universidad Técnica Luis Vargas Torres de Esmeraldas. Docente de la Facultad de la Pedagogía de la Universidad Técnica Luis Vargas Torres de Esmeraldas.

Índice

Índice de Figuras

Índice de Tablas

Introducción

La matemática, como lenguaje universal de la ciencia, desempeña un papel fundamental en el desarrollo de modelos que explican fenómenos naturales, sociales y tecnológicos. En este contexto, el cálculo diferencial e integral, junto con las ecuaciones diferenciales, son herramientas esenciales para la modelación y solución de problemas complejos en diversos campos del conocimiento. Este libro, elaborado como parte del programa de Maestría en Matemática, mención Modelación y Docencia, ofertado por la Universidad Técnica Luis Vargas Torres de Esmeraldas (UTLVTE) a través de su Vicerrectorado de Investigación, Innovación y Posgrado y la Dirección de Posgrado, responde a la necesidad de formar profesionales con habilidades avanzadas en estas áreas.

El propósito de este texto es proporcionar a los estudiantes de la maestría un recurso integral que combine fundamentos teóricos con aplicaciones prácticas, utilizando tanto enfoques analíticos como herramientas computacionales. En un mundo donde la resolución de problemas complejos demanda competencias interdisciplinares, este material busca consolidar el dominio del cálculo diferencial, integral y las ecuaciones diferenciales como pilares para el análisis y la solución de problemas en contextos científicos e ingenieriles.

El contenido del libro está estructurado en cuatro capítulos, cada uno diseñado para facilitar el aprendizaje progresivo:

- Cálculo diferencial y sus aplicaciones: Explora los conceptos fundamentales del cálculo diferencial y su utilidad en la modelación de fenómenos relacionados con la optimización y las tasas de cambio.

- Cálculo integral y sus aplicaciones: Aborda el cálculo integral como herramienta para la acumulación y el análisis de series y sucesiones, aplicándolo a problemas como la determinación de áreas, volúmenes y acumulaciones.

- Ecuaciones diferenciales: tipos y características: Introduce los conceptos básicos de las ecuaciones diferenciales, sus clasificaciones y métodos de resolución, proporcionando un puente hacia su aplicación práctica.

- Aplicaciones de las EDOs al modelado de sistemas: Profundiza en la utilidad de las ecuaciones diferenciales en la modelación de sistemas físicos, biológicos y económicos, destacando su relevancia en la simulación y predicción de comportamientos complejos.

Cada capítulo incluye ejercicios resueltos y propuestos, diseñados no solo para reforzar los conocimientos teóricos, sino también para desarrollar habilidades prácticas en el análisis y solución de problemas reales. Además, se integran herramientas computacionales que permiten a los estudiantes explorar enfoques modernos y eficientes en la resolución de problemas.

Este libro pretende ser un recurso valioso para los estudiantes de la maestría, fomentando no solo el aprendizaje, sino también el pensamiento crítico, la creatividad y la capacidad de aplicar conocimientos matemáticos en escenarios diversos. Invitamos a los lectores a sumergirse en este viaje académico y profesional, donde la matemática se convierte en una herramienta poderosa para comprender y transformar el mundo.

Prologo

La matemática, a lo largo de la historia, es una herramienta indispensable para desentrañar los misterios de la naturaleza y desarrollar tecnologías que transforman nuestra sociedad. Entre sus ramas, el cálculo diferencial, integral y las ecuaciones diferenciales han desempeñado un papel crucial en la modelación de fenómenos dinámicos y en la resolución de problemas que abarcan desde el ámbito científico hasta el ingenieril. Este libro, titulado Aplicación del Cálculo Diferencial e Integral y de las Ecuaciones Diferenciales, ha sido concebido como una respuesta a las necesidades formativas de los estudiantes de la Maestría en Matemática, mención Modelación y Docencia, ofertada por la Universidad Técnica Luis Vargas Torres de Esmeraldas (UTLVTE).

La obra que el lector tiene en sus manos surge del compromiso de la UTLVTE, a través de su Vicerrectorado de Investigación, Innovación y Posgrado, y la Dirección de Posgrado, por promover una formación académica de excelencia, orientada al desarrollo de competencias avanzadas en el uso de herramientas matemáticas para el análisis, modelación y solución de problemas complejos. Este libro no solo proporciona un compendio de conceptos y técnicas, sino que también enfatiza su aplicabilidad en contextos reales, combinando enfoques teóricos con recursos computacionales que potencian el aprendizaje y la investigación.

Estructurado en cuatro capítulos cuidadosamente diseñados, este texto integra fundamentos y aplicaciones de manera progresiva: desde los principios básicos del cálculo diferencial e integral hasta la aplicación avanzada de las ecuaciones diferenciales en la modelación de sistemas. Cada capítulo se enriquece con ejercicios resueltos y propuestos, que no solo consolidan el conocimiento teórico, sino que también desafían al lector a desarrollar su capacidad analítica y resolver problemas reales en áreas como la física, la biología, la economía y la ingeniería.

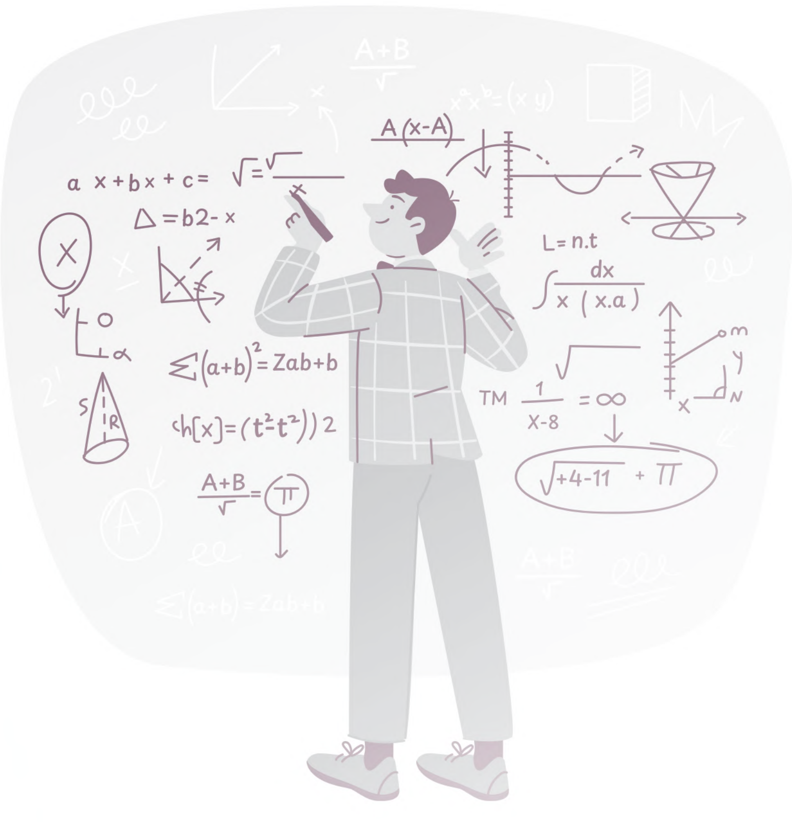
En un mundo caracterizado por la creciente complejidad de los desafíos científicos y tecnológicos, este libro aspira a ser una guía para quienes buscan no solo comprender los conceptos matemáticos avanzados, sino también aplicarlos en la solución de problemas concretos. La inclusión de herramientas computacionales refleja la necesidad de formar profesionales que puedan integrar tecnologías modernas en su labor académica y profesional.

Finalmente, esta obra es el esfuerzo colectivo de un equipo comprometido con la enseñanza y la investigación de excelencia. Su elaboración refleja el espíritu de colaboración entre docentes, estudiantes e investigadores que comparten la pasión por las matemáticas y su impacto transformador.

Invitamos a los lectores a recorrer las páginas de este libro con una actitud curiosa y reflexiva, conscientes de que cada ecuación resuelta, cada concepto aprendido y cada modelo desarrollado representa un paso hacia un conocimiento más profundo y una contribución significativa a la sociedad.

CAPITULO 01

Cálculo Diferencial y sus Aplicaciones Límites y Continuidad



Cálculo Diferencial y sus Aplicaciones

Límites y Continuidad

1.1. Límites y continuidad

El concepto de límite de una función es fundamental en el cálculo, ya que permite describir el comportamiento de una función cerca de un punto dado, facilitando el estudio de la continuidad y la derivabilidad de la función.

1.1.1. Definición de Límite

El límite de una función $f(x)$ en $x = a$ se define formalmente como:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

siempre que los valores de $f(x)$ se acerquen a L cuando x se aproxima a a desde ambos lados, es decir, tanto desde la izquierda como desde la derecha. En términos más intuitivos, esto significa que la función se estabiliza alrededor de un valor específico a medida que nos acercamos a un punto determinado.

El concepto de límites laterales se expresa como:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \to x_0^-} f(x) = L & \text{(límite por la izquierda)} \\ \lim_{x \to x_0^+} f(x) = L & \text{(límite por la derecha)} \end{cases}$$

Representación gráfica del concepto de límite lateral.

Tabla 1

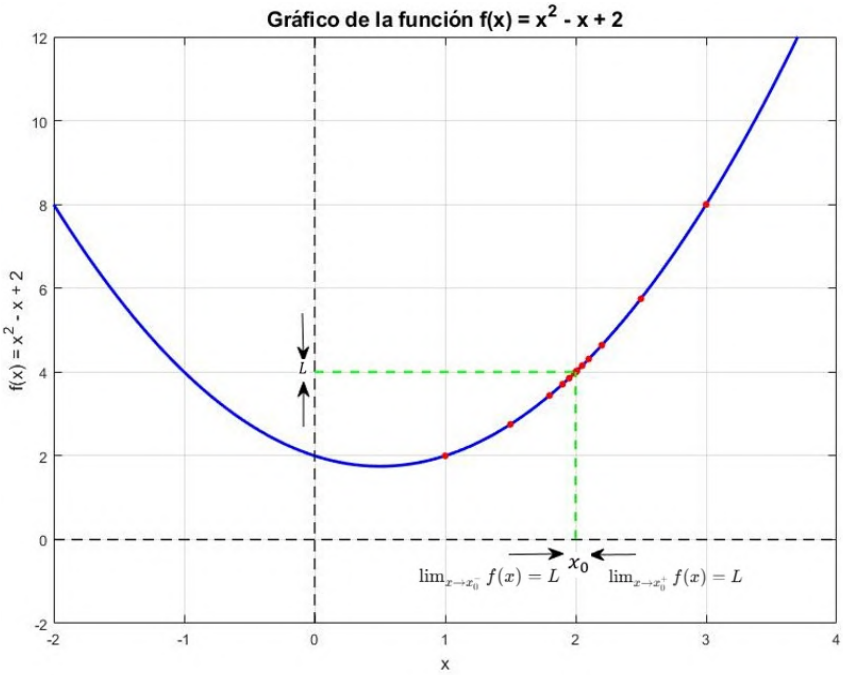
Comportamiento de la función cuando x se aproxima a ciertos puntos.

x	$f(x)$	x	$f(x)$
1.0	2.000000	3.0	8.000000
1.5	2.750000	2.5	5.750000
1.8	3.440000	2.2	4.640000
1.9	3.710000	2.1	4.310000
1.95	3.852500	2.05	4.152500
1.99	3.970100	2.01	4.030100
1.995	3.985025	2.005	4.015025
1.999	3.997001	2.001	4.003001

Nota: Autores (2026).

Figura 1

Representación gráfica del concepto de límite lateral



Nota: Autores (2026).

El límite puede ser evaluado utilizando diversas técnicas, incluyendo la sustitución directa, la factorización, el uso de conjugados y la regla de L'Hôpital en casos de indeterminaciones. Además, el concepto de límite es esencial para la definición de continuidad y derivadas, estableciendo así la base para el estudio del cálculo diferencial.

1.2. Continuidad

El concepto de continuidad en una función es crucial en el estudio del cálculo diferencial, ya que describe el comportamiento de la función en un intervalo determinado y su capacidad de ser derivada en puntos específicos.

1.2.1. Definición Formal de Continuidad

Una función $f(x)$ es **continua en un punto** $x = a$ si y solo si se cumplen las siguientes tres condiciones:

1. **La función está definida en el punto:** $f(a)$ debe existir.
2. **Existe el límite de la función en el punto:** $\lim_{x \to a} f(x)$ debe existir.

3. **El valor de la función coincide con el límite:** $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Si una función es continua en cada punto de un intervalo I, se dice que es **continua en el intervalo** I.

1.2.2.Interpretación Geométrica de la Continuidad

La continuidad de una función significa que su gráfica no tiene interrupciones, saltos ni huecos en el intervalo de estudio. Es decir, si una función es continua en un intervalo, se puede dibujar su gráfica sin levantar el lápiz del papel.

1.2.3.Ejemplos de Continuidad

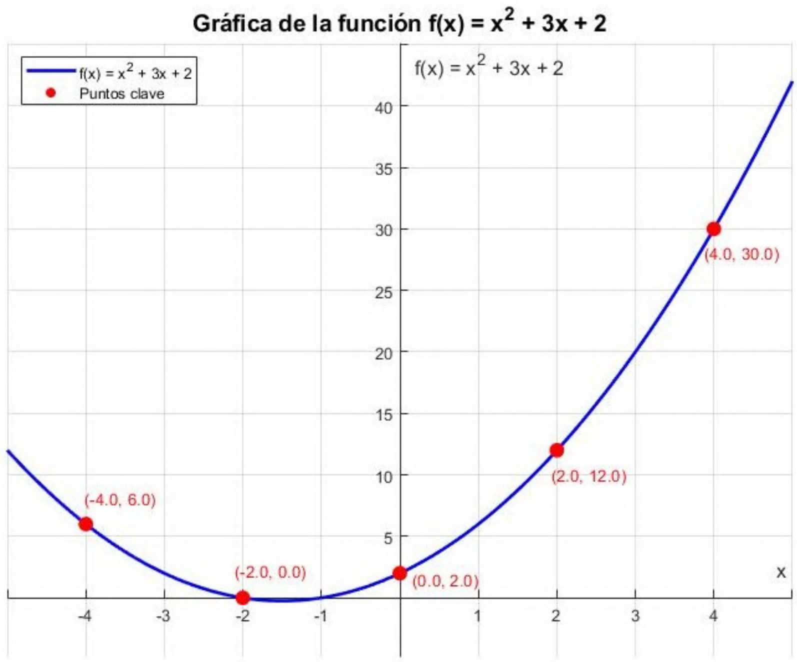
Ejemplo 1: Una función polinómica continua

Consideremos la función:

$$f(x) = x^2 + 3x + 2$$

Figura 2

Representación gráfica - Continuidad función polinómica.



Nota: Autores (2026).

Dado que es una función polinómica, es continua en todo el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$, ya que las funciones polinómicas son siempre continuas.

Ejemplo 2: Función con una discontinuidad removible

Sea la función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}, & x \neq 2 \\ 3, & x = 2 \end{cases}$$

El problema surge cuando comparamos el **valor de la función** $f(x)$ en $x = 2$ con el **límite de la función** cuando $x \to 2$.

Paso 1: Cálculo del límite cuando $x \to 2$

Dada la función:

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

Factorizamos el numerador:

$$f(x) = \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2}$$

Cancelamos el término común:

$$f(x) = x + 2, \quad \text{para } x \neq 2$$

Entonces, el **límite de la función cuando** $x \to 2$ es:

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 2 + 2 = 4$$

Es decir, la función **tiende a 4** cuando nos acercamos a $x = 2$.

Paso 2: ¿Está definida $f(2)$*?*

Si evaluamos directamente $f(2)$ en la expresión original:

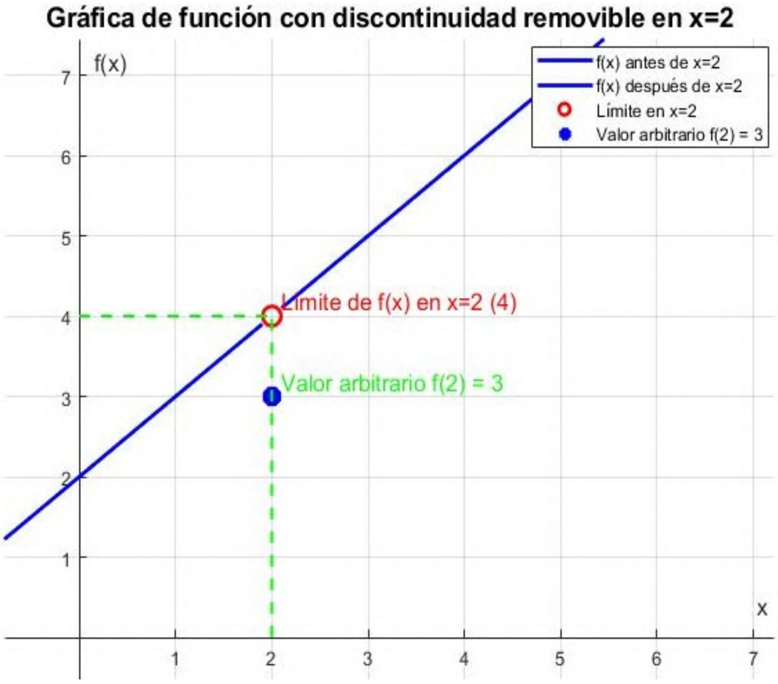
$$f(2) = \frac{2^2 - 4}{2 - 2} = \frac{4 - 4}{0} = \frac{0}{0}, \quad \text{indeterminación.}$$

Por lo tanto, $f(2)$ **no está definida en la función original**.

Sin embargo, si **redefinimos manualmente** que $f(2) = 3$, estamos estableciendo un **valor arbitrario**, que no coincide con el límite. En este caso:

- El límite de $f(x)$ en $x = 2$ es 4.
- El valor de $f(2)$ se define como 3, pero no es coherente con la tendencia de la función.

Figura 3.
Representación gráfica - discontinuidad removible



Nota: Autores (2026).

Dado que $\lim_{x\to 2} f(x) \neq f(2)$, la función **no es continua en** $x = 2$. Sin embargo, si redefiniéramos $f(2) = 4$, la función sería continua.

Ejemplo 3: Función con una discontinuidad de salto
Consideremos la función definida por partes:

$$g(x) = \begin{cases} x + 1, & x < 2 \\ x^2 - 2, & x \geq 2 \end{cases}$$

Paso 1: Evaluamos los límites laterales en $x = 2$

Límite por la izquierda:

$$\lim_{x \to 2^-} g(x) = 2 + 1 = 3$$

Límite por la derecha: $\lim_{x \to 2^+} g(x) = 2^2 - 2 = 2$

Figura 4

Representación gráfica - discontinuidad de salto.

Nota: Autores (2026).

Dado que $\lim_{x \to 2^-} g(x) \neq \lim_{x \to 2^+} g(x)$, los límites laterales no coinciden, por lo que $g(x)$ **tiene una discontinuidad de salto en** $x = 2$.

Ejemplo 4: Función con una discontinuidad infinita

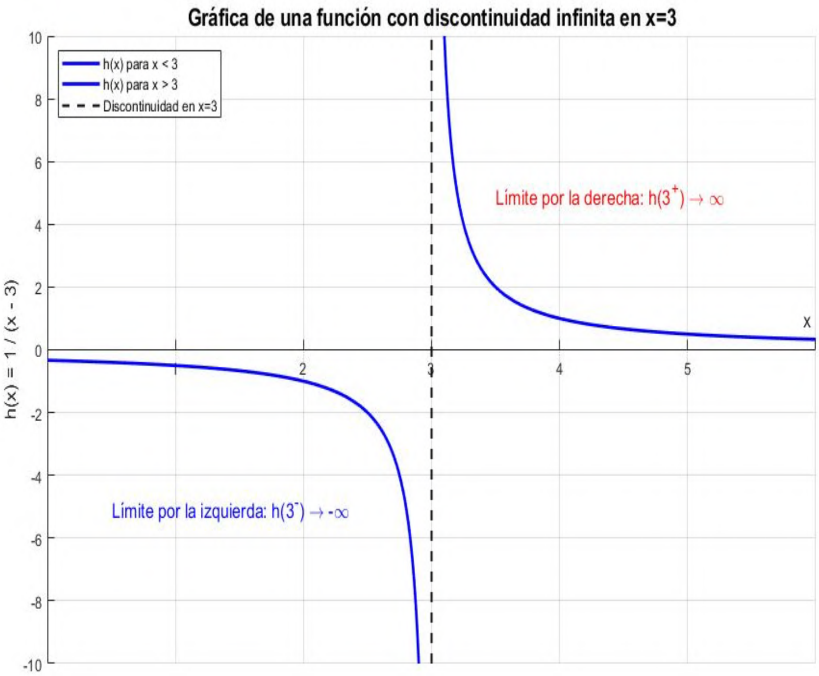
La función: $h(x) = \frac{1}{x-3}$

tiene una discontinuidad infinita en $x = 3$, ya que:

$$\lim_{x \to 3^-} h(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to 3^+} h(x) = \infty$$

Figura 5.

Representación gráfica - discontinuidad infinita



Nota: Autores (2026).

Dado que los límites no son finitos ni coinciden, la función tiene una **discontinuidad infinita en** $x = 3$.

1.2.4.Tipos de Discontinuidad

1. **Discontinuidad removible**: Ocurre cuando el límite de la función en un punto existe, pero la función no está definida en ese punto o su valor no coincide con el límite.

2. **Discontinuidad de salto**: Sucede cuando los límites laterales existen, pero no son iguales.

3. **Discontinuidad infinita**: Se presenta cuando al acercarse a un punto la función tiende a ∞ o $-\infty$.

1.2.5.Ejemplo de Aplicación en la Vida Real

Caso 1.

Un caso práctico del concepto de continuidad ocurre en la termodinámica, cuando se analiza el cambio de temperatura de un material con el tiempo. Si un material se calienta gradualmente, la función que describe su temperatura es continua. Sin embargo, si se sumerge en agua fría de manera abrupta, su temperatura experimenta una discontinuidad de salto.

Caso 2.

Imaginemos un sistema de tuberías donde fluye un gas o líquido. La ecuación de Bernoulli describe la conservación de la energía en fluidos en movimiento:

$$P + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g h = \text{constante}$$

Si una válvula se cierra abruptamente en x_0, la presión $P(x)$ experimenta una discontinuidad infinita debido a la acumulación instantánea de fluido en un lado de la válvula y la falta de presión en el otro:

$$P(x) = \frac{1}{x - x_0}$$

Esta ecuación muestra que la presión tiende a ∞ en x_0, generando una onda de choque en el fluido. La gráfica es similar a la mostrada en el ejemplo 3.

1.3. Indeterminaciones y Métodos de Resolución

En muchos casos, al evaluar un límite directamente, obtenemos una expresión que no tiene un valor definido, lo que se conoce como una **indeterminación**. Existen diferentes tipos de indeterminaciones y métodos para resolverlas correctamente.

1.3.1. Tipos de Indeterminaciones

Los casos más comunes de indeterminaciones en cálculo son:

- $\frac{0}{0}$ (Forma de indeterminación más común en límites).
- $\frac{\infty}{\infty}$ (Cuando el numerador y el denominador tienden a infinito simultáneamente).
- $0 \times \infty$ (Un factor tiende a cero y otro a infinito).
- $\infty - \infty$ (Diferencia de dos valores infinitos).
- $0^0, 1^\infty, \infty^0$ (Potencias indeterminadas).

Cada una de estas formas requiere un método específico para su resolución.

1.3.2. Métodos de Resolución

1.3.2.1. Factorización y Simplificación

Si la expresión del límite presenta una fracción algebraica, podemos intentar factorizar y cancelar términos comunes.

Ejemplo: $\lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2}$

Factorizamos el numerador:

$$\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}$$

Cancelamos el término común y evaluamos:

$$\lim_{x \to 2} x + 2 = 4$$

1.3.2.2. Racionalización

Se usa cuando hay raíces en el numerador o denominador.

Ejemplo:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$$

Multiplicamos por el conjugado:

$$\frac{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)}{x(\sqrt{x+1}+1)}$$

Aplicamos la identidad $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$ en el numerador:

$$\frac{x+1-1}{x(\sqrt{x+1}+1)} = \frac{x}{x(\sqrt{x+1}+1)}$$

Cancelamos el x en el numerador y denominador:

$$\frac{1}{\sqrt{x+1}+1}$$

Finalmente, evaluamos el límite:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{0+1}+1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

1.3.2.3. Regla de L'Hôpital

Cuando obtenemos una indeterminación de la forma $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$, derivamos numerador y denominador por separado.

Ejemplo: $\lim_{x \to \infty} \frac{x}{e^x}$

Derivamos numerador y denominador:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

1.3.2.4. Evaluación de la Indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$

Cuando tenemos la indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$, es importante analizar la tasa de crecimiento de las funciones en el numerador y denominador. Existen tres posibilidades:

- Si el infinito del numerador crece más rápido que el del denominador, el límite es $\pm\infty$.
- Si el infinito del denominador crece más rápido, entonces el límite es 0.
- Si ambos crecen con la misma rapidez, es necesario encontrar la relación de proporcionalidad entre ellos.

Para ilustrarlo, consideremos funciones racionales. Sean $P(x)$ y $Q(x)$ polinomios de grado m y n respectivamente:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{a_m x^m + \cdots + a_0}{b_n x^n + \cdots + b_0}$$

Para determinar el resultado, aplicamos la siguiente regla:

- Si $m > n$, el numerador crece más rápido que el denominador, por lo que el límite es $\pm\infty$. El signo dependerá de la división de los términos principales de $P(x)$ y $Q(x)$.

- Si $m < n$, el denominador crece más rápido que el numerador, lo que implica que el límite es 0.

- Si $m = n$, ambos términos crecen con la misma rapidez y debemos calcular la constante de proporcionalidad:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{a_m x^m}{b_n x^m} = \frac{a_m}{b_n}$$

donde a_m y b_n son los coeficientes principales de $P(x)$ y $Q(x)$.

Ejemplo: Evaluemos el siguiente límite: $\lim_{x \to \infty} \frac{4x^3+2x+1}{x^3+5x+7}$

Aplicamos la regla mencionada: - El grado del numerador y el denominador es el mismo ($m = n = 3$). - Los coeficientes principales son $a_m = 4$ y $b_n = 1$.

Por lo tanto, el límite es: $\frac{4}{1} = 4$

1.3.3. Crecimiento Comparativo de Funciones y Límites Notables

Para analizar el comportamiento asintótico de diferentes funciones, consideremos la jerarquía de crecimiento de las funciones exponenciales, polinomiales y logarítmicas.

Comparación del crecimiento de $y = a^x$, $y = x^n$ y $y = log_a(x)$.

Observaciones sobre el crecimiento. Se observa que:

- Para $x \to \infty$, las funciones exponenciales a^x crecen mucho más rápido que cualquier función polinómica x^n, y estas, a su vez, crecen más rápido que cualquier función logarítmica $\log_a(x)$. - Es decir, la jerarquía de crecimiento en el infinito es:

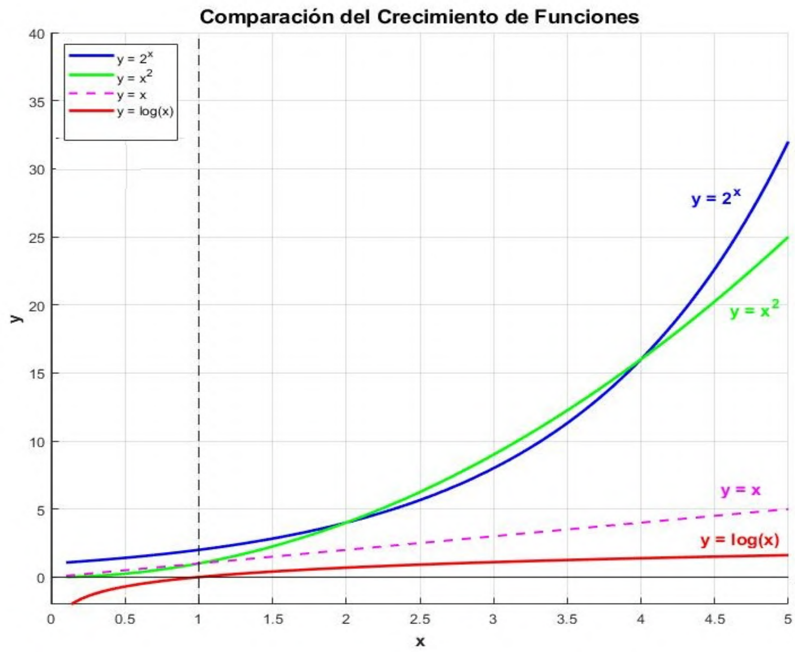
$$a^x \gg x^n \gg \log_a(x), \quad \text{para } a > 1, n \in \mathbb{N}, x > 0.$$

- Esta relación de crecimiento nos ayuda a evaluar límites que presentan indeterminaciones del tipo $\frac{\infty}{\infty}$.

Cálculo de Límites

Figura 6

Comparación del crecimiento de funciones notables.



Nota: Autores (2026).

Apliquemos estas observaciones para calcular algunos límites comunes:

1. $\lim_{x\to\infty} \frac{2^x}{\ln(x)}$

Como 2^x crece mucho más rápido que $\ln(x)$, el límite tiende a infinito:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2^x}{\ln(x)} = \infty.$$

2. $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{e^x}$

Sabemos que e^x crece más rápido que $\ln(x)$, por lo que el límite es:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{e^x} = 0.$$

3. $\lim_{x\to\infty} \frac{2^x}{x^2}$

Como $2^x \gg x^2$, el límite tiende a infinito:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2^x}{x^2} = \infty.$$

4. $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{\ln(x)}$

Como $x^2 \gg \ln(x)$, el límite tiende a infinito:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{\ln(x)} = \infty.$$

5. $\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+1}{x}$

Dividimos por la mayor potencia de x:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+1}{x} = \lim_{x\to\infty} x^2 + \frac{1}{x}.$$

Como $x^2 \to \infty$, el límite es:

$$\infty.$$

6. $\lim_{x\to\infty} \frac{x-3}{x^5}$

Como $x^5 \gg x$, el límite es:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x-3}{x^5} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^5} - \frac{3}{x^5} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^4} - \frac{3}{x^5} = 0.$$

Por tanto, el análisis del crecimiento de funciones nos permite evaluar límites sin necesidad de aplicar la regla de L'Hôpital en muchos casos. La jerarquía $a^x \gg x^n \gg \log_a(x)$ es una herramienta clave en el estudio de límites en cálculo diferencial.

1.3.4. Propiedades de los Límites

El cálculo de límites se simplifica considerablemente mediante el uso de ciertas propiedades fundamentales. A continuación, presentamos las principales reglas que nos permiten operar con límites de manera algebraica.

1.3.4.1. Propiedad de Linealidad

Si existen los límites de $f(x)$ y $g(x)$ cuando x tiende a un valor a, y sean c y d constantes, entonces:

$$\lim_{x\to a}(cf(x) + dg(x)) = c\lim_{x\to a} f(x) + d\lim_{x\to a} g(x).$$

Ejemplo:

$$\lim_{x \to 3}(5x^2 + 2x - 1) = 5\lim_{x \to 3} x^2 + 2\lim_{x \to 3} x - \lim_{x \to 3} 1.$$

Evaluamos cada límite individualmente:

$$5(3^2) + 2(3) - 1 = 45 + 6 - 1 = 50.$$

1.3.4.2. Propiedad del Producto

$$\lim_{x \to a}(f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x).$$

Ejemplo:

$$\lim_{x \to 2}(x^2 \cdot \sin x) = \lim_{x \to 2} x^2 \cdot \lim_{x \to 2} \sin x.$$

Evaluamos:

$$(2^2) \cdot \sin(2) = 4 \cdot \sin(2).$$

1.3.4.3. Propiedad del Cociente

Si $\lim_{x \to a} g(x) \neq 0$, entonces:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}.$$

Ejemplo:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}.$$

Factorizando el numerador:

$$\lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x - 1}.$$

Cancelamos $x - 1$ y evaluamos:

$$\lim_{x \to 1}(x + 1) = 1 + 1 = 2.$$

1.3.4.4. Propiedad del Límite de una Potencia

Si existe $\lim_{x\to a} f(x)$, entonces:

$$\lim_{x\to a}(f(x))^n = (\lim_{x\to a} f(x))^n.$$

Ejemplo:

$$\lim_{x\to 4}(x^2+3x)^3 = (\lim_{x\to 4}(x^2+3x))^3.$$

Evaluamos:

$$(4^2+3(4))^3 = (16+12)^3 = 28^3.$$

1.3.4.5. Propiedad del Límite de una Raíz

Si existe $\lim_{x\to a} f(x)$ y n es un entero positivo, entonces:

$$\lim_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)}.$$

Ejemplo:

$$\lim_{x\to 9}\sqrt{x+7} = \sqrt{\lim_{x\to 9}(x+7)}.$$

Evaluamos:

$$\sqrt{9+7} = \sqrt{16} = 4.$$

1.3.4.6. Propiedad del Límite de una Función Compuesta

Si $\lim_{x\to a} g(x) = L$ y $\lim_{x\to L} f(x)$ existe, entonces:

$$\lim_{x\to a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x\to a} g(x)\right).$$

Ejemplo:

$$\lim_{x\to 1}\sin(x^2+x).$$

Evaluamos primero el argumento:

$$\lim_{x\to 1}(x^2+x) = 1^2+1 = 2.$$

Por lo tanto:

$$\lim_{x\to 1}\sin(x^2+x)=\sin(2).$$

1.3.5. Asíntotas de una Función

Las asíntotas representan comportamientos límite de una función cuando x se aproxima a ciertos valores (finito o infinito). Existen tres tipos de asíntotas:

- Asíntotas Verticales
- Asíntotas Horizontales
- Asíntotas Oblicuas

1.3.5.1. Asíntotas Verticales

Las asíntotas verticales aparecen cuando la función crece o decrece sin límite al acercarse a un valor específico de x, es decir:

$$\lim_{x\to a} f(x)=\pm\infty.$$

Para encontrar asíntotas verticales, se deben analizar los puntos donde el denominador de una fracción racional es cero y no se cancela con el numerador.

Ejemplo:

$$f(x)=\frac{1}{x-3}$$

Analizando el denominador $x-3=0\Rightarrow x=3$, que genera una asíntota vertical. Gráficamente, $f(x)$ se acerca a $\pm\infty$ cuando $x\to 3$.

1.3.5.2. Asíntotas Horizontales

Las asíntotas horizontales describen el comportamiento de la función cuando $x\to\pm\infty$, es decir:

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=L, \quad \text{o} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=L.$$

Si existe un número L, la función se estabiliza en ese valor a medida que $x\to\pm\infty$.

Ejemplo:

$$f(x) = \frac{2x}{x+1}$$

Dividimos numerador y denominador por x:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x}{x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{1+\frac{1}{x}}.$$

Como $\frac{1}{x} \to 0$ cuando $x \to \infty$, tenemos:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 2.$$

Por lo tanto, $y = 2$ es una asíntota horizontal.

1.3.5.3. Asíntotas Oblicuas

Si la función no tiene asíntota horizontal y el grado del numerador es mayor en exactamente un grado al del denominador, la función posee una asíntota oblicua.

Para encontrarla, realizamos la división de polinomios.

Ejemplo:

$$f(x) = \frac{x^2+x+1}{x}$$

Dividimos $x^2 + x + 1$ entre x, obteniendo:

$$f(x) = x + 1 + \frac{1}{x}.$$

Cuando $x \to \infty$, $\frac{1}{x} \to 0$, por lo que la asíntota oblicua es:

$$y = x + 1.$$

1.4. Derivada y Razones de Cambio

La derivada es uno de los conceptos fundamentales del cálculo diferencial. Su interpretación geométrica y su aplicación en problemas de variación y optimización la convierten en una herramienta esencial en múltiples disciplinas.

1.4.1. Concepto de Derivada a partir de una Recta Secante

Para entender la derivada, consideremos primero la pendiente de una recta secante a una curva. Dada una función $f(x)$, la pendiente de la secante entre los puntos $(x, f(x))$ y $(x+h, f(x+h))$ se obtiene mediante la razón de cambio promedio:

$$m_{\text{secante}} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Cuando $h \to 0$, la recta secante se convierte en una recta tangente, cuya pendiente es la derivada de $f(x)$:

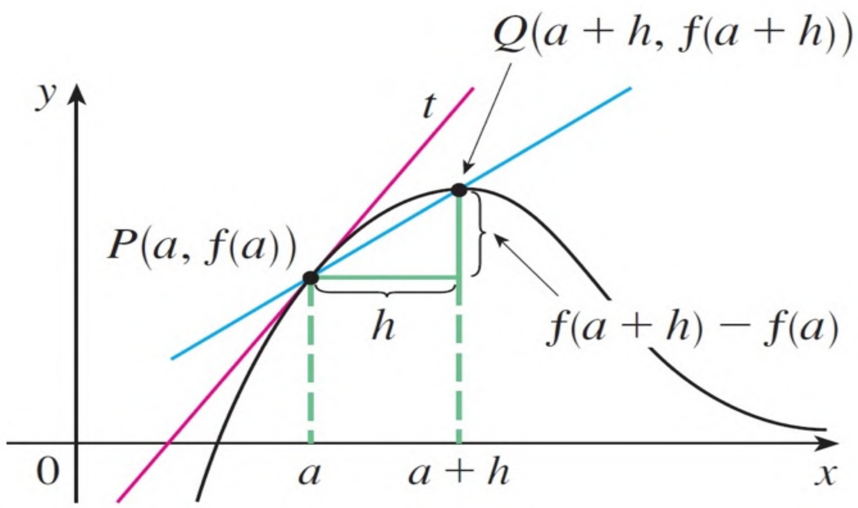
$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x).$$

En la gráfica se observa:

- **La curva negra** representa la función $f(x)$.
- **La recta secante azul** conecta los puntos $P(a, f(a))$ y $Q(a+h, f(a+h))$.
- **La recta tangente roja** muestra la pendiente en $x = a$.
- **Las líneas auxiliares verdes** indican la diferencia en x y y para la derivada.

Figura 7.

Formación de la derivada como un límite; x=a



Nota: Autores (2026).

1.4.2. Definición Formal de la Derivada

La derivada de una función $f(x)$ en un punto x se define como el siguiente límite:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Esta expresión representa la razón de cambio instantánea de $f(x)$ en x, es decir, la pendiente de la recta tangente a la curva en ese punto.

Ejemplo 1: Cálculo de la Derivada mediante el Límite. Encuentre la ecuación de la recta tangente a la función $f(x) = \frac{3}{x}$ en el punto $(3,1)$.

Solución: La pendiente de la tangente en $x = 3$ se obtiene con el límite:

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h}$$

Sustituyendo $f(x) = \frac{3}{x}$:

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{3}{3+h} - 1}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{3 - (3+h)}{h(3+h)} = \lim_{h \to 0} \frac{-h}{h(3+h)}$$

Cancelamos h:

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-1}{3+h} = -\frac{1}{3}$$

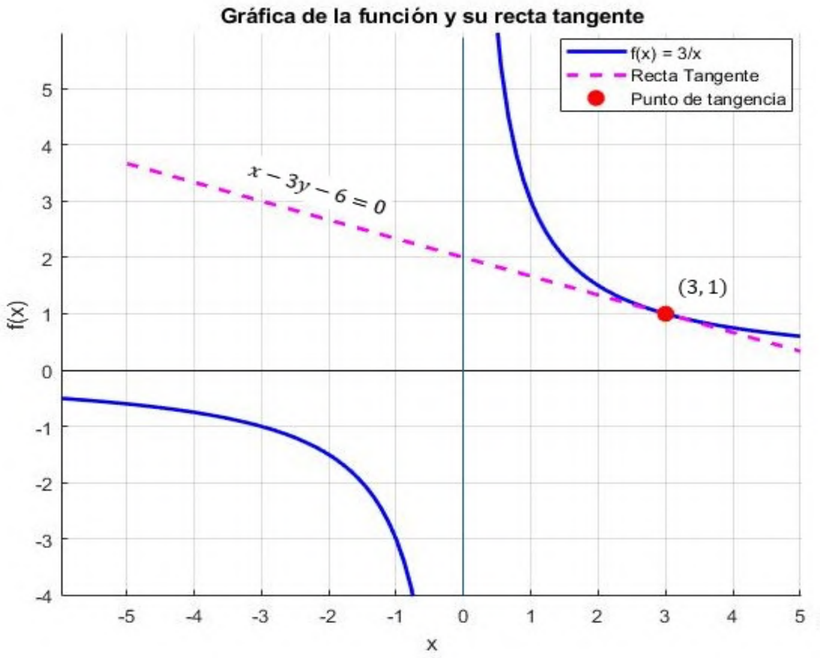
Por lo tanto, la ecuación de la recta tangente en $(3,1)$ es:

$$y - 1 = -\frac{1}{3}(x - 3)$$

$$x + 3y - 6 = 0$$

Figura 8.

Gráfica de f(x)=3/x y su recta tangente en (3,1).



Nota: Autores (2026).

Ejemplo 2: Cálculo de la Derivada mediante el Límite. Encuentre la ecuación de la recta tangente a la función $f(x) = x^2 - 4x + 3$ en el punto $(2, -1)$.

Solución: La pendiente de la tangente en $x = 2$ se obtiene con el límite:

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$$

Paso 1: Evaluar la función en $x = 2$

$$f(2) = (2)^2 - 4(2) + 3 = -1$$

Paso 2: Evaluar $f(2+h)$

$$f(2+h) = (2+h)^2 - 4(2+h) + 3$$

Expandiendo:

$$= 4 + 4h + h^2 - 8 - 4h + 3 = h^2 - 1$$

Paso 3: Aplicar la definición de derivada

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{(h^2 - 1) - (-1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2}{h} = \lim_{h \to 0} h = 0$$

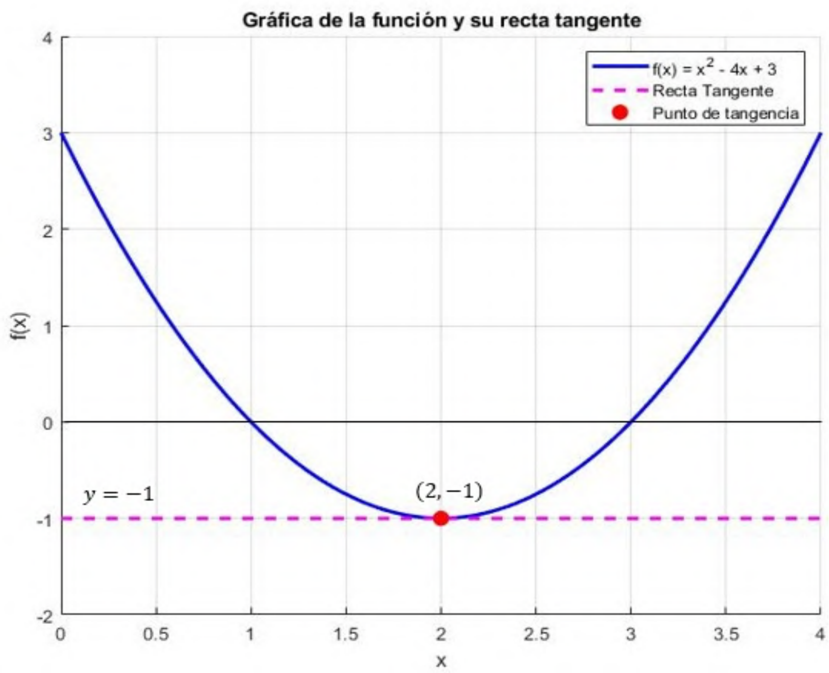
La pendiente de la tangente es **0**, lo que indica que la recta tangente es **horizontal**.

Paso 4: Ecuación de la recta tangente

$$y = -1$$

Figura 9.

Gráfica de f(x)=x^2-4x+3 y su recta tangente en (2,-1).



Nota: Autores (2026).

1.4.3. Velocidades y Razones de Cambio

La derivada permite calcular la tasa de variación de una magnitud respecto a otra. Algunos ejemplos:

- **Velocidad instantánea**: Si $s(t)$ representa la posición de un objeto en función del tiempo, entonces la velocidad es la derivada:

$$v(t) = s'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}.$$

- **Crecimiento poblacional**: Si $P(t)$ es la población en el tiempo t, la tasa de crecimiento es $P'(t)$.

- **Razones de cambio en economía**: En economía, la derivada del costo $C(x)$ respecto a la producción x es el costo marginal $C'(x)$.

Ejemplo 1: Velocidad Instantánea

Un ciclista inicia su recorrido desde el reposo y su desplazamiento en metros después de t segundos viene dado por la función:

$$s(t) = 3t^2 + 2t$$

Determina su velocidad instantánea en el instante $t = 4$ segundos utilizando la definición de la derivada como límite.

Solución

La velocidad instantánea se obtiene como la derivada del desplazamiento:

$$v(t) = \lim_{h \to 0} \frac{s(t+h) - s(t)}{h}$$

Sustituyendo la función $s(t)$:

$$v(4) = \lim_{h \to 0} \frac{3(4+h)^2 + 2(4+h) - (3(4)^2 + 2(4))}{h}$$

Expandimos y simplificamos:

$$= \lim_{h \to 0} \frac{3(16 + 8h + h^2) + 8 + 2h - (48 + 8)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{48 + 24h + 3h^2 + 8 + 2h - 56}{h}$$

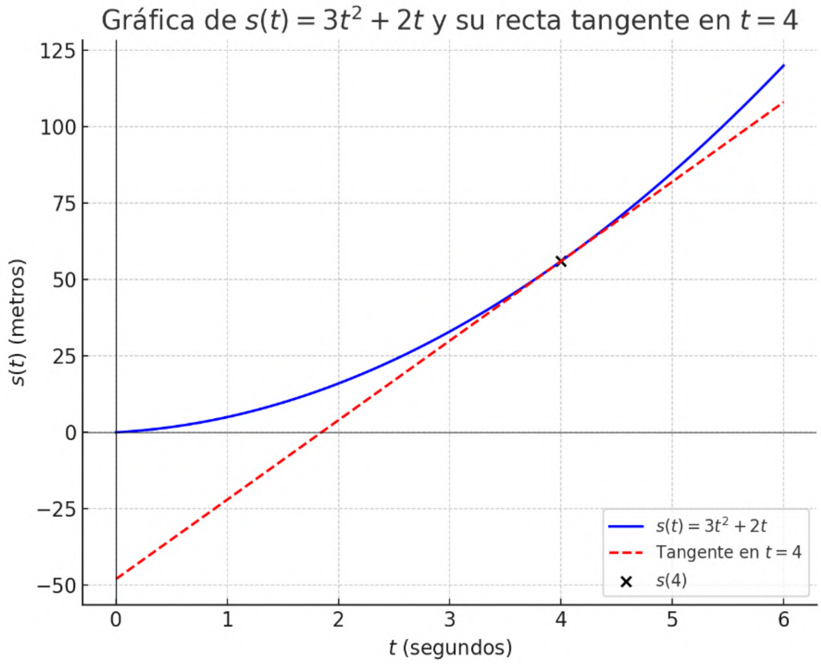
$$= \lim_{h \to 0} \frac{24h + 3h^2 + 2h}{h} = \lim_{h \to 0} (24 + 3h + 2)$$

Evaluando el límite:

$$v(4) = 24 + 2 = 26 \text{ m/s}$$

Figura 10.

Gráfica de velocidad instantánea



Nota: Autores (2026).

La gráfica representa la función de posición $s(t) = 3t^2 + 2t$, que describe el movimiento de un objeto en función del tiempo. La curva azul muestra cómo varía la posición del objeto a medida que transcurre el tiempo, mientras que la recta roja representa la tangente a la curva en $t = 4$.

La pendiente de esta recta tangente es igual a la velocidad instantánea del objeto en ese instante, la cual fue calculada como $v(4) = 26$ m/s. En términos físicos, la pendiente de la recta tangente indica la tasa de cambio instantánea de la posición, es decir, qué tan rápido y en qué dirección se está moviendo el objeto en ese punto específico del tiempo.

Ejemplo 2: Crecimiento Poblacional

La población de una ciudad está modelada por la función:

$$P(t) = 5000e^{0.03t}$$

donde t se mide en años y $P(t)$ representa la población en ese instante. Calcula la tasa de crecimiento poblacional en $t = 10$ años usando la definición de derivada.

Solución

La tasa de crecimiento poblacional se define como:

$$P'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{P(t+h) - P(t)}{h}$$

Sustituyendo la función:

$$P'(10) = \lim_{h \to 0} \frac{5000e^{0.03(10+h)} - 5000e^{0.03(10)}}{h}$$

Factorizamos $5000e^{0.3}$:

$$= \lim_{h \to 0} \frac{5000e^{0.3}(e^{0.03h} - 1)}{h}$$

Usamos la aproximación $e^x \approx 1 + x$ para valores pequeños de x:

$$e^{0.03h} - 1 \approx 0.03h$$

Entonces,

$$= \lim_{h \to 0} \frac{5000e^{0.3}(0.03h)}{h}$$

Cancelamos h:

$$P'(10) = 5000e^{0.3}(0.03)$$

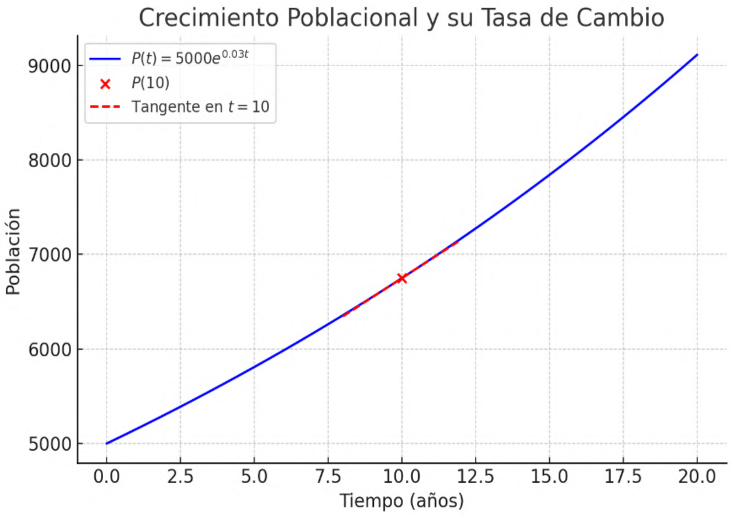
Aproximando valores numéricos:

$$P'(10) \approx 5000(1.3499)(0.03) \approx 202$$

El gráfico muestra la evolución de la población en función del tiempo t, donde la función $P(t) = 5000e^{0.03t}$ modela el crecimiento poblacional. La curva creciente indica que la población aumenta exponencialmente con el tiempo. En $t = 10$ años, la tasa de crecimiento poblacional se obtiene mediante la derivada de $P(t)$, que representa la velocidad con la que está creciendo la población en ese instante. La pendiente de la tangente en $t = 10$ indica qué tan rápido está aumentando la población en ese año en particular. Una mayor pendiente sugiere un crecimiento más acelerado.

Figura 11

Representación del crecimiento poblacional en función del tiempo



Nota: porque usamos esta aproximación $e^x \approx 1 + x$

Cuando trabajamos con funciones exponenciales en límites y derivadas, en algunos casos es útil utilizar la aproximación de la serie de Taylor de la función exponencial alrededor de $x = 0$:

$$e^x \approx 1 + x \quad \text{para valores pequeños de } x$$

Esta aproximación nos dice que cuando x es un número muy pequeño, e^x es aproximadamente $1 + x$. Es decir, la contribución de los términos de orden superior en la serie de Taylor es despreciable.

En nuestro caso, el término que queremos aproximar es:

$$e^{0.03h}$$

Si h es muy pequeño, podemos escribir:

$$e^{0.03h} \approx 1 + 0.03h$$

Ahora, si restamos 1 en ambos lados:

$$e^{0.03h} - 1 \approx 0.03h$$

Ejemplo 3: Razón de Cambio en Economía

El costo total $C(x)$ en dólares para producir x unidades de un producto está modelado por la función:

$$C(x) = 100 + 5x + 0.02x^2$$

Calcula el costo marginal cuando se producen $x = 50$ unidades.

Solución: El costo marginal se obtiene como la derivada del costo total:

$$C'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{C(x+h) - C(x)}{h}$$

Sustituyendo la función:

$$C'(50) = \lim_{h \to 0} \frac{100 + 5(50+h) + 0.02(50+h)^2 - (100 + 5(50) + 0.02(50)^2)}{h}$$

Desarrollamos términos:

$$= \lim_{h \to 0} \frac{100 + 250 + 5h + 0.02(2500 + 100h + h^2) - (100 + 250 + 0.02(2500))}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{100 + 250 + 5h + 50 + 2h + 0.02h^2 - (100 + 250 + 50)}{h}$$

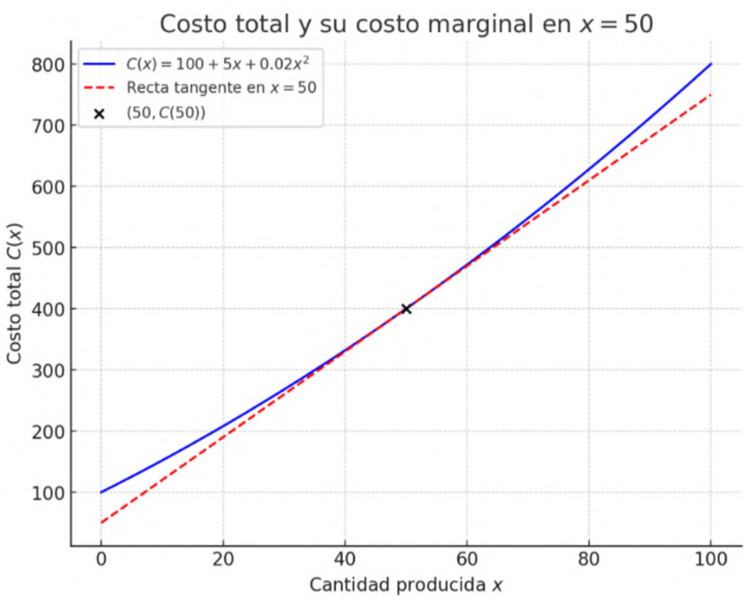
$$= \lim_{h \to 0} \frac{5h + 2h + 0.02h^2}{h} = \lim_{h \to 0} (7 + 0.02h)$$

Evaluamos el límite:

$$C'(50) = 7$$

Figura 12

Gráfico de la función de costo total C(x) y su costo marginal



Nota: Autores (2026).

En la figura la curva azul representa la función de costo total $C(x)$, mientras que la línea punteada roja representa la tangente en $x = 50$, la cual tiene una pendiente de $C'(50) = 7$. Esto ilustra cómo la derivada de la función de costo nos proporciona el costo marginal en un punto específico.

1.4.4. Razón de Cambio Instantánea

La razón de cambio es un concepto fundamental en el cálculo, ya que describe cómo una variable cambia con respecto a otra. Si y es una función de x, es decir, $y = f(x)$, podemos definir la razón de cambio promedio de y respecto a x en un intervalo $[x_1, x_2]$ como:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Este cociente de diferencias representa la pendiente de la recta secante que pasa por los puntos $P(x_1, f(x_1))$ y $Q(x_2, f(x_2))$.

Sin embargo, en muchos casos nos interesa conocer la tasa de cambio en un punto específico en lugar de en un intervalo. Para obtener esto, hacemos que x_2 tienda a x_1, lo que significa que $\Delta x \to 0$. En este caso, el cociente de diferencias se convierte en un límite:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Este límite se conoce como la **razón de cambio instantánea** de y respecto a x, y geométricamente representa la pendiente de la recta tangente a la curva en $P(x_1, f(x_1))$. Este concepto es la base de la definición de la **derivada** de una función, que se estudiará en profundidad en los siguientes apartados.

1.5. Reglas de Derivación

Para derivar funciones de manera eficiente, se utilizan diversas reglas fundamentales del cálculo diferencial. Estas reglas permiten calcular derivadas de funciones complejas a partir de funciones más simples.

1.5.1. Regla de la Potencia

La **regla de la potencia** establece que si $f(x) = x^n$, donde n es un número real, entonces su derivada se obtiene multiplicando el exponente por la base elevada a una unidad menos:

$$f'(x) = nx^{n-1}$$

Ejemplo: Si $f(x) = x^5$, su derivada es:

$$f'(x) = 5x^4$$

1.5.2. Regla del Producto

La **regla del producto** se utiliza cuando la función a derivar es el producto de dos funciones diferenciables $u(x)$ y $v(x)$. Se expresa como:

$$(uv)' = u'v + uv'$$

Ejemplo: Si $f(x) = x^2 \text{sin} x$, aplicamos la regla:

$$f'(x) = (x^2)' \text{sin} x + x^2 (\text{sin} x)'$$

$$f'(x) = 2x \text{sin} x + x^2 \text{cos} x$$

1.5.3. Regla del Cociente

Cuando se tiene una función definida como el cociente de dos funciones diferenciables $u(x)$ y $v(x)$, se aplica la **regla del cociente**:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Ejemplo: Si $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$, su derivada es:

$$f'(x) = \frac{(x^2)'(x+1) - x^2(x+1)'}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{2x(x+1) - x^2}{(x+1)^2} = \frac{2x^2 + 2x - x^2}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}$$

1.5.4. Regla de la Cadena

La **regla de la cadena** permite derivar funciones compuestas. Si $y = f(g(x))$, la derivada de y con respecto a x es:

$$\frac{dy}{dx} = f'(g(x))g'(x)$$

Ejemplo: Si $f(x) = \sin(x^3)$, aplicamos la regla de la cadena:

$$f'(x) = \cos(x^3) \cdot (x^3)'$$

$$= \cos(x^3) \cdot 3x^2$$

$$= 3x^2\cos(x^3)$$

1.5.5. Combinación de Reglas

En muchas ocasiones, se requiere utilizar varias reglas en conjunto. Por ejemplo, si tenemos la función $f(x) = \frac{x^2\ln x}{e^x}$, su derivada requiere aplicar la regla del cociente junto con la regla del producto y la derivada del logaritmo:

$$f'(x) = \frac{(x^2\ln x)'e^x - x^2\ln x(e^x)'}{(e^x)^2}$$

$$= \frac{(2x\ln x + x)e^x - x^2\ln x e^x}{e^{2x}}$$

$$= \frac{(2x\ln x + x - x^2\ln x)e^x}{e^{2x}}$$

$$= \frac{(2x\ln x + x - x^2\ln x)}{e^x}$$

1.6. Notaciones de las Derivadas

Dado que la derivada es una herramienta fundamental en el cálculo y otras áreas de las matemáticas, existen diversas notaciones para representarla. A continuación, se presentan las más utilizadas:

1.6.1.Notación de Leibniz

La notación introducida por **Gottfried Wilhelm Leibniz** es una de las más utilizadas en cálculo y análisis matemático. Se representa como:

$$\frac{dy}{dx}$$

Esta notación enfatiza que la derivada de y con respecto a x es el límite del cociente de diferencias:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Además, permite expresar derivadas de orden superior de manera clara:

$$\frac{d^2y}{dx^2}, \quad \frac{d^3y}{dx^3}, \quad \frac{d^ny}{dx^n}$$

Ejemplo: Si $y = x^3 + 2x$, su primera derivada se expresa como:

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 2$$

1.6.2.Notación de Lagrange

Introducida por **Joseph-Louis Lagrange**, esta notación es ampliamente utilizada en análisis matemático y cálculo diferencial. Se representa usando una prima:

$$f'(x)$$

Para derivadas de orden superior: $f''(x), \quad f'''(x), \quad f^{(n)}(x)$

Ejemplo: Si $f(x) = e^x \sin x$, su derivada se expresa como:

$$f'(x) = e^x \sin x + e^x \cos x$$

1.6.3.Notación de Newton

Esta notación, introducida por **Isaac Newton**, se usa principalmente en física y mecánica, especialmente en ecuaciones de movimiento y dinámica. Se representa con un punto sobre la variable:

$\dot{y}$ (primera derivada), $\ddot{y}$ (segunda derivada)

Ejemplo: Si $s(t)$ representa la posición de un objeto en función del tiempo:

$$\dot{s} = v \quad \text{(velocidad)}, \quad \ddot{s} = a \quad \text{(aceleración)}$$

1.6.4. Notación de Euler

Introducida por **Leonhard Euler**, esta notación es utilizada en ecuaciones diferenciales y análisis funcional. Se representa como:

$$Df(x)$$

Para derivadas de orden superior:

$$D^2 f(x), \quad D^3 f(x), \quad D^n f(x)$$

Ejemplo: Si $f(x) = \ln x$, su derivada en la notación de Euler es:

$$Df(x) = \frac{1}{x}$$

1.7. Derivadas de Orden Superior

Cuando una función $f(x)$ es derivable, se puede calcular su derivada $f'(x)$. Si esta derivada también es diferenciable, se puede obtener una nueva derivada, llamada **segunda derivada**, que se denota como:

$$f''(x) = \frac{d}{dx}(f'(x)).$$

De manera general, la **derivada de orden** n se expresa como:

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n f}{dx^n}.$$

1.7.1. Interpretación Geométrica y Física de la Derivada

La derivada de una función $f(x)$ proporciona información clave sobre su comportamiento, tanto desde un punto de vista geométrico como físico. Se puede interpretar como la pendiente de la recta tangente a la curva en un punto específico o como la razón de cambio instantánea de una cantidad respecto a otra.

Interpretación Geométrica

Geométricamente, la derivada $f'(x)$ en un punto $x = a$ indica la pendiente de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en ese punto:

Si $f'(a) > 0$, la función es creciente en $x = a$, es decir, la pendiente de la tangente es positiva.

Si $f'(a) < 0$, la función es decreciente en $x = a$, lo que significa que la pendiente de la tangente es negativa.

Si $f'(a) = 0$, la recta tangente es horizontal. En este caso, $x = a$ puede ser un máximo, un mínimo o un punto de inflexión.

La segunda derivada $f''(x)$ proporciona información adicional sobre la concavidad de la función:

Si $f''(a) > 0$, la función es cóncava hacia arriba en $x = a$, y la tangente se encuentra por debajo de la curva.

Si $f''(a) < 0$, la función es cóncava hacia abajo en $x = a$, y la tangente se encuentra por encima de la curva.

Si $f''(a) = 0$, se debe analizar el cambio de signo en $f''(x)$ para determinar si $x = a$ es un punto de inflexión.

Interpretación Física

Desde una perspectiva física, la derivada mide la velocidad de cambio de una magnitud respecto a otra. Algunos ejemplos importantes incluyen:

- **Velocidad instantánea**: Si $s(t)$ representa la posición de un objeto en función del tiempo, entonces la velocidad en un instante t está dada por la derivada:

$$v(t) = s'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}.$$

- **Aceleración**: Si $v(t)$ es la velocidad de un objeto en función del tiempo, la aceleración instantánea se obtiene derivando nuevamente:

$$a(t) = v'(t) = s''(t).$$

- **Crecimiento poblacional**: Si $P(t)$ representa la población en un instante t, la tasa de crecimiento está dada por:

$$P'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(t + \Delta t) - P(t)}{\Delta t}.$$

- **Razón de cambio en economía**: En economía, la derivada del costo total $C(x)$ con respecto a la cantidad producida x se denomina costo marginal:

$$C'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{C(x + \Delta x) - C(x)}{\Delta x}.$$

La derivada es una herramienta fundamental tanto en la geometría como en la física y la economía. Su interpretación geométrica permite analizar la pendiente de una función y su concavidad, mientras que su interpretación física describe tasas de cambio en diferentes contextos. Además, el análisis de $f'(x)$ y $f''(x)$ proporciona información clave sobre máximos, mínimos y puntos de inflexión, lo que es crucial en el estudio del comportamiento de funciones en diversas aplicaciones.

1.7.2.Ejemplos de Cálculo de Derivadas de Orden Superior

Ejemplo 1: Sea la función

$$f(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 - x + 5.$$

Calculamos sus primeras derivadas:

$$f'(x) = 4x^3 - 9x^2 + 4x - 1.$$

$$f''(x) = 12x^2 - 18x + 4.$$

$$f'''(x) = 24x - 18.$$

$$f^{(4)}(x) = 24.$$

Podemos observar que la cuarta derivada es una constante, lo cual indica que la función es un polinomio de grado 4 y su derivada de orden 5 será cero.

1.7.3. Ejemplo: Aplicación Física de las Derivadas de Orden Superior

En física, las derivadas de una función de posición $s(t)$ con respecto al tiempo tienen interpretaciones concretas:

- **Velocidad:** $v(t) = s'(t)$, describe la rapidez y dirección del movimiento.
- **Aceleración:** $a(t) = s''(t)$, indica cómo cambia la velocidad.
- **Jerk (tirón):** $j(t) = s'''(t)$, representa la tasa de cambio de la aceleración, relevante en dinámicas de vehículos y sistemas mecánicos.

Ejemplo: Sea la posición de un objeto en caída libre dada por:

$$s(t) = 5t^3 - 2t^2 + 4t.$$

Calculamos sus derivadas:

$$v(t) = s'(t) = 15t^2 - 4t + 4.$$

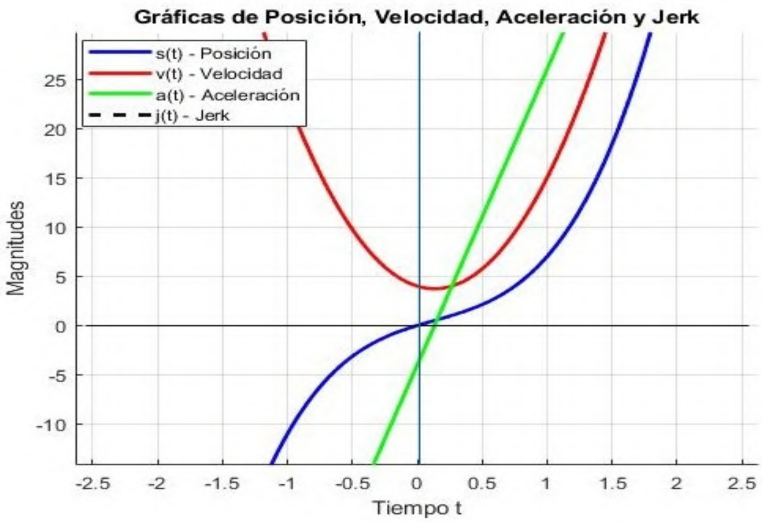
$$a(t) = v'(t) = s''(t) = 30t - 4.$$

$$j(t) = a'(t) = s'''(t) = 30.$$

Aquí vemos que la aceleración $a(t)$ es una función lineal del tiempo, mientras que el tirón $j(t)$ es una constante. En la siguiente figura se muestran las gráficas de cada una de estas funciones:

Figura 13

Gráfica de posición, velocidad, aceleración y jerk para la función f(t).



Nota: Autores (2026).

1.8. Introducción a las funciones de una variable

En matemáticas, una función de una variable es una regla que asigna a cada número real de un dominio un único número real en el rango. Formalmente, una función es una relación matemática que satisface la propiedad de unicidad: para cada entrada x en el dominio, existe una única salida $f(x)$.

1.8.1. Conceptos fundamentales

Para comprender el comportamiento de una función, es fundamental saber cómo representarla y analizar sus características. A continuación, se presentan los pasos clave para determinar su comportamiento:

1. **Saber el dominio y el rango**
   - Identificar los valores de x para los cuales la función está definida (**dominio**).
   - Analizar los valores de y que la función puede tomar (**rango**).
2. Identificar las asíntotas (si existen)
   - **Los límites laterales** estudian el comportamiento de una función cuando x se acerca a un valor dado desde la izquierda o desde la derecha. Es importante mencionar que un límite existe si ambos lados coinciden. Una función es **continua** en un punto $x = a$ si:

$$\lim_{x \to a} f(x) \text{ existe,} \quad f(a) \text{ está definida,} \quad \text{y} \quad \lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

   - **Asíntotas verticales:** Ocurren cuando el denominador de una función racional se anula y la función tiende a infinito.
   - **Asíntotas horizontales:** Se encuentran al calcular el límite de la función cuando $x \to \pm\infty$.
   - **Asíntotas oblicuas:** Aparecen cuando el grado del numerador es mayor que el del denominador en una función racional.
3. **Calcular los puntos de intersección**
   - Intersección con el eje x: Resolver $f(x) = 0$.

- Intersección con el eje y: Evaluar $f(0)$, si está definida.

4. **Estudiar la derivada para conocer el comportamiento de la función**

- **Crecimiento y decrecimiento:** Usar la primera derivada $f'(x)$ para identificar intervalos de aumento $(f'(x) > 0)$ y disminución $(f'(x) < 0)$.
- **Máximos y mínimos locales:** Encontrar los puntos críticos resolviendo $f'(x) = 0$.

5. **Analizar la concavidad y los puntos de inflexión**

- La segunda derivada $f''(x)$ indica la concavidad de la función; si $f''(x) > 0$ es cóncava y si $f''(x) < 0$ es convexa.
- Resolver $f''(x) = 0$ para encontrar posibles puntos de inflexión.

6. **Construir una tabla de valores:** Evaluar la función en diferentes puntos estratégicos para ayudar en la representación gráfica.
7. **Dibujar la gráfica:** Utilizar los puntos clave, asíntotas y cambios en la concavidad para esbozar la curva de la función con precisión.

Teorema del valor medio: El teorema del valor medio establece que si una función $f(x)$ es continua en $[a,b]$ y diferenciable en (a,b), entonces existe un punto $c \in (a,b)$ donde la derivada es igual a la pendiente de la recta secante que une $(a, f(a))$ con $(b, f(b))$:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Este resultado es clave para entender cómo varían las funciones y se usa en demostraciones de otras propiedades del cálculo diferencial. El Teorema del Valor Medio tiene aplicaciones en la física y el análisis de movimientos. Por ejemplo, si un automóvil recorre 300 km en 5 horas, su velocidad media es de 60 km/h. El teorema garantiza que, en algún instante, la velocidad instantánea del coche fue exactamente 60 km/h.

1.8.2. Ejercicios resueltos: estudio de funciones de una variable

En esta sección, analizaremos una función en términos de su dominio, rango, asíntotas, puntos de intersección, derivadas y su gráfica.

Ejemplo 1: Estudiar el comportamiento de la función:

$$f(x) = \frac{1}{x-2}$$

1. **Dominio y Rango**

- **Dominio:** La función no está definida en $x = 2$, ya que el denominador se anula en ese punto. Entonces:

$$D = (-\infty, 2) \cup (2, \infty)$$

- **Rango:** La función puede tomar todos los valores reales excepto 0, por lo que:

$$R = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$$

2. **Análisis de Asíntotas**

- **Asíntota Vertical:** Se encuentra en $x = 2$, ya que:

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$$

- **Asíntota Horizontal:** Se calcula el límite cuando x tiende a infinito:

$$\lim_{x\to \pm\infty} f(x) = 0$$

Por lo que la asíntota horizontal es $y = 0$. Si existe asíntota horizontal, no existe asíntota oblicua.

3. **Puntos de intersección**

- **Con el eje X**: No hay solución, ya que la función no se anula.
- **Con el eje Y**: Evaluamos en $x = 0$:

$$f(0) = \frac{1}{0-2} = -0.5$$

Punto de intersección: $(0, -0.5)$.

4. Estudio de la primera y segunda derivada

- **Primera derivada:**

$$f'(x) = -\frac{1}{(x-2)^2}$$

La derivada siempre es negativa para $x \neq 2$, por lo que la función es decreciente.

- **Segunda derivada:**

$$f''(x) = \frac{2}{(x-2)^3}$$

Si $x < 2$, $f''(x) < 0 \Rightarrow$ concavidad hacia abajo.

Si $x > 2$, $f''(x) > 0 \Rightarrow$ concavidad hacia arriba.

5. Construcción de la tabla de valores

Valores de la función en diferentes puntos.

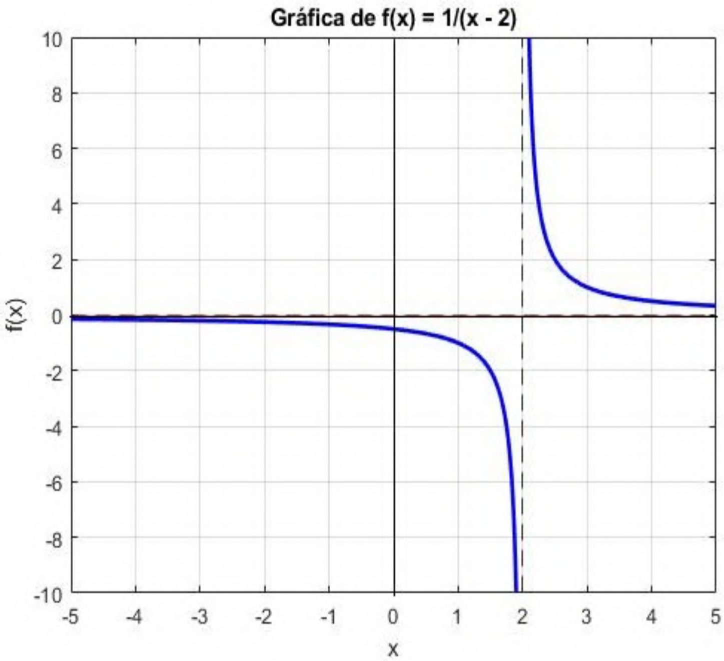
$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{f(x)}$
-2	-0.25
0	-0.5
1.5	-2
1.9	-10
2.1	10
3	1
5	0.33

6. Gráfica de la función

A continuación, se muestra la gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{x-2}$:

Figura 14.

Gráfica de f(x)=1/(x-2) con sus asíntotas.



Nota: Autores (2026).

La gráfica de la función muestra una discontinuidad en $x = 2$, evidenciada por la asíntota vertical en dicho punto. Esta discontinuidad se debe a que la función no está definida en $x = 2$, donde el denominador se anula, provocando que los valores de $f(x)$ tiendan a $+\infty$ o $-\infty$ dependiendo de la dirección desde la que se aproxima.

Además, se observa una asíntota horizontal en $y = 0$, lo que indica que a medida que x tiende a $\pm\infty$, la función se aproxima a cero sin llegar a tocarlo. La función es siempre decreciente en su dominio, lo que se confirma con el signo de su primera derivada.

Finalmente, la concavidad de la función cambia en torno a $x = 2$, mostrando concavidad hacia abajo para $x < 2$ y concavidad hacia arriba para $x > 2$, lo cual se determina mediante el análisis de la segunda derivada.

7. Código MATLAB para graficar la función

El siguiente código genera la gráfica de $f(x)$, incluyendo sus asíntotas, y contiene comentarios explicativos para facilitar su comprensión:

Código MATLAB para graficar f(x) con sus asíntotas

```
% Definir la variable simbólica
syms x;

% Definir la función
f = 1/(x - 2);

% Graficar la función en el intervalo dado
fplot(f, [-5, 5], 'b', 'LineWidth', 2);
hold on; % Mantener la gráfica para añadir elementos

% Configurar la cuadrícula y etiquetas
grid on;
xlabel('x'); % Etiqueta del eje X
ylabel('f(x)'); % Etiqueta del eje Y
title('Gráfica de f(x) = 1/(x - 2)'); % Título de la gráfica

% Añadir asíntotas
yline(0, '--r', 'Asíntota horizontal'); % Asíntota horizontal en y
    =0
xline(2, '--k', 'Asíntota vertical'); % Asíntota vertical en x=2

hold off; % Liberar la gráfica para futuras figuras
```

Ejercicio 2: Análisis de una función cuadrática

Función: $f(x) = x^2 - 4x + 3$

1. Encuentre el dominio y el rango.
2. Determine los puntos críticos.
3. Determine los máximos y mínimos.
4. Grafique la función.
5. Utilice el teorema del valor medio para encontrar un punto C donde la derivada sea igual a la pendiente secante para el intervalo $[1,4]$.

1. Dominio y Rango

- **Dominio:** La función cuadrática $f(x) = x^2 - 4x + 3$ está definida para todos los valores de x, por lo que su dominio es:

$$D = (-\infty, \infty)$$

Rango: Para determinar el rango, identificamos el vértice de la parábola. Como el coeficiente principal es positivo, la parábola abre hacia arriba y su punto más bajo es el vértice.

Cálculo del vértice: Derivamos la función e igualamos a cero para encontrar el punto crítico:

$$f'(x) = 2x - 4$$

Resolviendo $2x - 4 = 0$ obtenemos $x_v = 2$. Sustituyendo en la función:

$$y_v = f(2) = 2^2 - 4(2) + 3 = 4 - 8 + 3 = -1$$

Por lo tanto, el vértice es $V(2, -1)$ y el rango de la función es:

$$R = [-1, \infty)$$

2. Puntos Críticos

Los puntos críticos se obtienen al igualar la primera derivada a cero:

$$f'(x) = 2x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2$$

El punto crítico es $x = 2$.

3. Determinación de Máximos y Mínimos

Para determinar si el punto crítico es un máximo o mínimo, analizamos la segunda derivada:

$$f''(x) = \frac{d}{dx}(2x - 4) = 2$$

Como $f''(x) > 0$, la función es cóncava hacia arriba y el punto crítico es un **mínimo** en $x = 2$ con $f(2) = -1$. No hay máximos.

4. Aplicación del Teorema del Valor Medio

El teorema del valor medio establece que existe un punto c en el intervalo $[1,4]$ donde la derivada es igual a la pendiente de la secante:

$$f'(c) = \frac{f(4) - f(1)}{4 - 1}$$

Calculamos los valores de la función:

$$f(4) = 4^2 - 4(4) + 3 = 3, \quad f(1) = 1^2 - 4(1) + 3 = 0$$

$$\text{Pendiente secante} = \frac{3 - 0}{4 - 1} = \frac{3}{3} = 1$$

Igualamos con la derivada:

$$2c - 4 = 1$$

$$2c = 5 \Rightarrow c = \frac{5}{2}$$

Por lo tanto, existe un punto $c = 2.5$ donde la pendiente de la tangente es exactamente la misma que la de la secante.

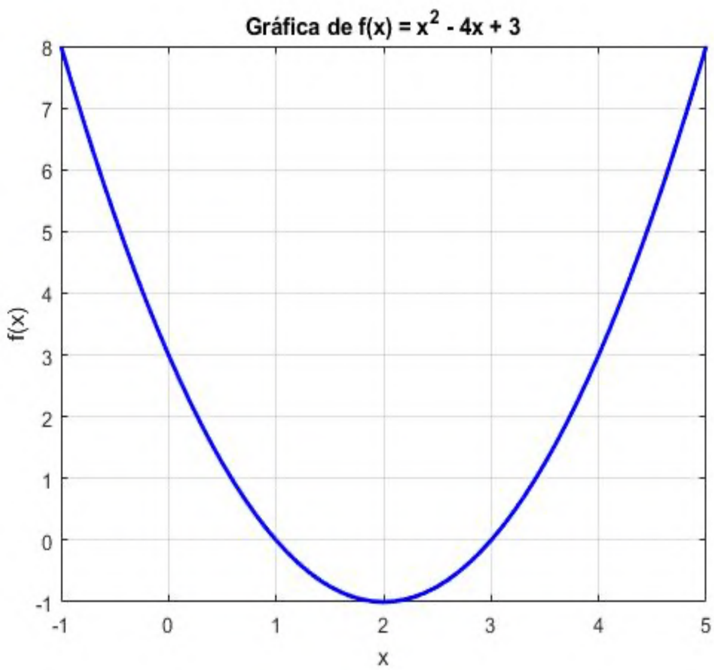
1. Gráfica de la función

Tabla de valores para la función cuadrática

x	$f(x)$
-1	8
0	3
2	-1
3	0
4	3
5	8

Figura 15.

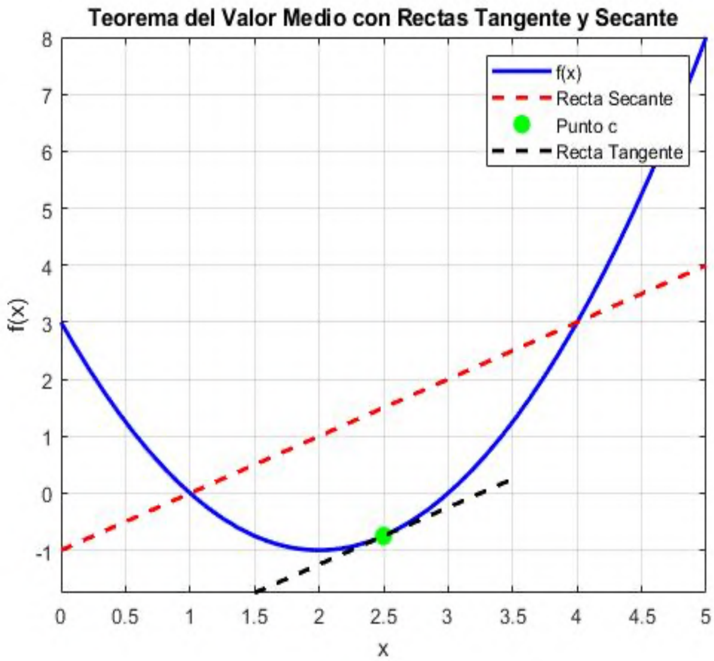
Gráfica de f(x)=x^2-4x+3



Nota: Autores (2026).

Figura 16

Teorema del valor medio con recta tangente y secante



Nota: Autores (2026).

La primera gráfica representa la función cuadrática $f(x) = x^2 - 4x + 3$, cuya forma parabólica muestra un mínimo en $x = 2$, que se calculó mediante la primera y segunda derivada. En este punto, la derivada primera $f'(x) = 2x - 4$ se anula, lo que indica un punto crítico. La segunda derivada $f''(x) = 2$, al ser positiva, confirma que se trata de un mínimo local en $(2, -1)$. La gráfica ilustra cómo la función disminuye antes del vértice y crece después de él, lo que coincide con los resultados analíticos.

La segunda gráfica ilustra el **Teorema del Valor Medio (TVM)** aplicado a la función en el intervalo $[1,4]$. Se ha trazado la recta secante entre los puntos $(1, f(1))$ y $(4, f(4))$, cuya pendiente representa la tasa de cambio promedio en ese intervalo. Mediante el TVM, se encontró un punto c dentro del intervalo donde la derivada de la función es igual a la pendiente de la secante. En la gráfica, se muestra este punto c junto con su recta tangente, la cual es paralela a la secante. Esto confirma que en algún instante dentro del intervalo, la velocidad de cambio instantánea de la función coincide con su velocidad media en ese rango.

```
% Definir el rango de valores de x
x = -1:0.1:5;

% Definir la función cuadrática
y = x.^2 - 4*x + 3;

% Graficar la función con color azul y grosor de línea 2
plot(x, y, 'b', 'LineWidth', 2);
hold on; % Mantener la gráfica para añadir elementos

% Configurar la cuadrícula y etiquetas
grid on;
xlabel('x'); % Etiqueta del eje X
ylabel('f(x)'); % Etiqueta del eje Y
title('Gráfica de f(x) = x^2 - 4x + 3'); % Título de la gráfica

hold off; % Liberar la gráfica para futuras figuras
```

Ejercicio 3: Funciones Reales $f(x) = \frac{x^2-4}{x-1}$

1. Encuentre el dominio y el rango.
2. Determine las asíntotas
3. Determine los puntos críticos y extremos.
4. Graficar la función.

1. Dominio y Rango

El dominio de una función racional se obtiene al identificar los valores de x donde el denominador es cero. En este caso:

$$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$$

Por lo tanto, el dominio de $f(x)$ es:

$$D = (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$$

2. Asíntotas

Asíntota vertical: Ocurre en $x = 1$ ya que el denominador se anula, pero el numerador no.

Asíntota Oblicua: Se obtiene cuando el grado del numerador es exactamente 1 unidad mayor que el grado del denominador. En este caso:

$$\frac{x^2-4}{x-1}$$

Realizamos la división de polinomios:

1. Dividimos el primer término del numerador x^2 entre el primer término del denominador x:

$$\frac{x^2}{x}=x$$

2. Multiplicamos x por el divisor $(x-1)$ y restamos:

$$x\cdot(x-1)=x^2-x$$

$$(x^2-4)-(x^2-x)=x-4$$

3. Repetimos el proceso dividiendo $x-4$ entre x:

$$\frac{x}{x}=1$$

$$1\cdot(x-1)=x-1$$

$$(x-4)-(x-1)=-3$$

El cociente de la división es:

$$x+1$$

El residuo es -3, por lo que podemos reescribir la función como:

$$f(x)=x+1+\frac{-3}{x-1}$$

Cuando $x\to\pm\infty$, el término $\frac{-3}{x-1}$ tiende a 0, por lo que la asíntota oblicua es:

$$y=x+1$$

Tabla 2
Comparación de Asíntotas

Tipo de Asíntota	Condición	Ejemplo
Horizontal	$\deg(P)\le\deg(Q)$	$\frac{3x}{x+2}$ tiene asíntota en $y=3$
Oblicua	$\deg(P)=\deg(Q)+1$	$\frac{x^2-4}{x-1}$ tiene asíntota en $y=x+1$

Nota: Autores (2026).

3. Puntos Críticos y Extremos

Para encontrar los puntos críticos, derivamos $f(x)$ usando la regla del cociente:

$$f'(x) = \frac{(2x)(x-1)-(x^2-4)(1)}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x+4}{(x-1)^2}$$

Igualando a cero:

$$x^2 - 2x + 4 = 0$$

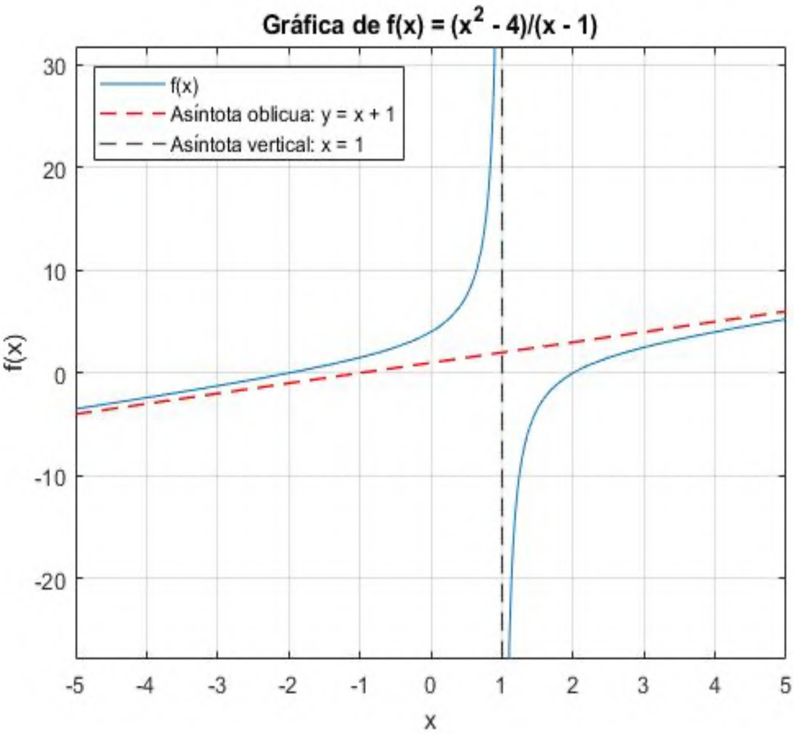
Resolviendo con la fórmula cuadrática, encontramos raíces complejas:

$$x = 1 \pm 2\sqrt{3}i$$

Esto indica que la función no tiene máximos ni mínimos reales.

4. Grafica de la función

Figura 17.
Función racional con asíntota oblicua



Nota: Autores (2026).

5. Código MATLAB para graficar la función

```
% Definir la variable simbólica
syms x;

% Definir la función racional
f = (x^2 - 4)/(x - 1);

% Graficar la función en el intervalo dado
fplot(f, [-5, 5], 'b', 'LineWidth', 2);
hold on; % Mantener la gráfica para añadir elementos

% Añadir la asíntota oblicua
fplot(x + 1, [-5, 5], 'r--', 'LineWidth', 1); % Asíntota oblicua y
    = x + 1

% Añadir la asíntota vertical
xline(1, '--k', 'LineWidth', 1); % Asíntota vertical en x = 1

% Configurar la cuadrícula y etiquetas
grid on;
xlabel('x'); % Etiqueta del eje X
ylabel('f(x)'); % Etiqueta del eje Y
title('Gráfica de f(x) = (x^2 - 4)/(x - 1)'); % Título de la grá
   fica
legend({'f(x)', 'Asíntota oblicua: y = x + 1', 'Asíntota vertical:
    x = 1'}, 'Location', 'northwest');

hold off; % Liberar la gráfica para futuras figuras
```

Ejercicios 4. Funciones trigonométricas $f(x) = \sin(x) - \frac{x}{2}$

1. Dominio y Rango

La función $\sin(x)$ está definida en todo $\mathbb{R}$. La expresión $-\frac{x}{2}$ también está definida en todo $\mathbb{R}$. Por lo tanto, el dominio de la función es:

$$D = (-\infty, \infty)$$

Por otro lado, la función $\sin(x)$ está acotada en el intervalo $[-1,1]$, pero el término $-\frac{x}{2}$ hace que la función no esté acotada.

A medida que $x \to \infty$ o $x \to -\infty$, el término $-\frac{x}{2}$ domina y hace que la función tienda a $-\infty$. Por lo tanto, el rango es:

$$R = (-\infty, \infty)$$

2. Encontrar puntos críticos

Los puntos críticos ocurren cuando la derivada de la función es cero.

$$f(x) = \sin(x) - \frac{x}{2} \Rightarrow f'(x) = \cos(x) - \frac{1}{2}$$

Igualamos a cero:

$$\cos(x) - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow \cos(x) = \frac{1}{2}$$

Para resolver esta ecuación, recordamos que:

$$\cos(x) = \frac{1}{2} \quad \text{en} \quad x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Por lo tanto, los puntos críticos son:

$$x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

3. Determinar los máximos y mínimos

Para determinar si un punto crítico es un máximo o mínimo, evaluamos la segunda derivada:

$$f''(x) = -\sin(x)$$

Evaluamos en $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$:

$$f''\left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$f''\left(-\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right) = -\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Como $f''(x) < 0$, la función es cóncava hacia abajo y $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ es un máximo local.

Como $f''(x) > 0$, la función es cóncava hacia arriba y $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ es un mínimo local.

4. Graficar la función

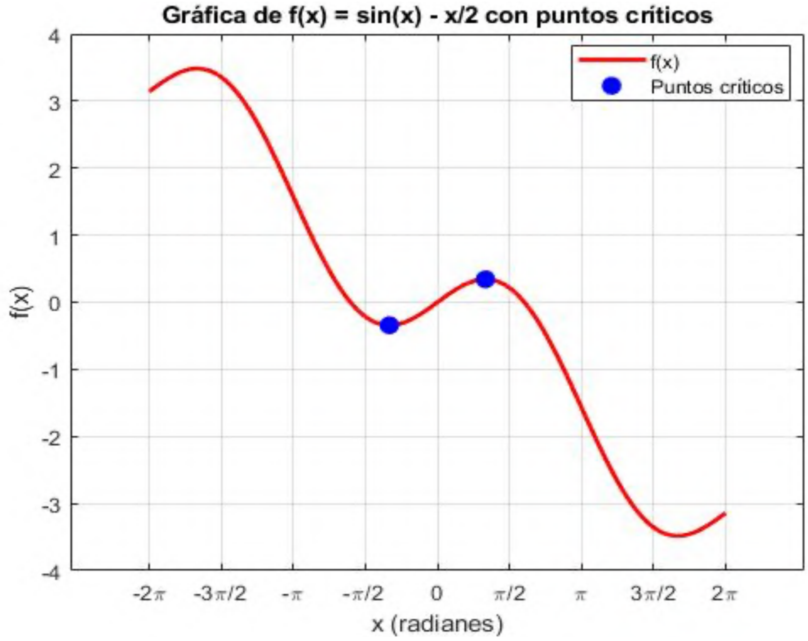
Construimos la tabla de valores para evaluar los puntos.

x	$f(x)$
-2π	3.14
-3π	3.35
$-\pi$	1.57
0	0

x	$f(x)$
π	-1.57
3π	-3.35
2π	-3.14

Figura 18.

Gráfica de f(x)=sin(x)-x/2 con puntos críticos



Nota: Autores (2026).

Código MATLAB para representar la función

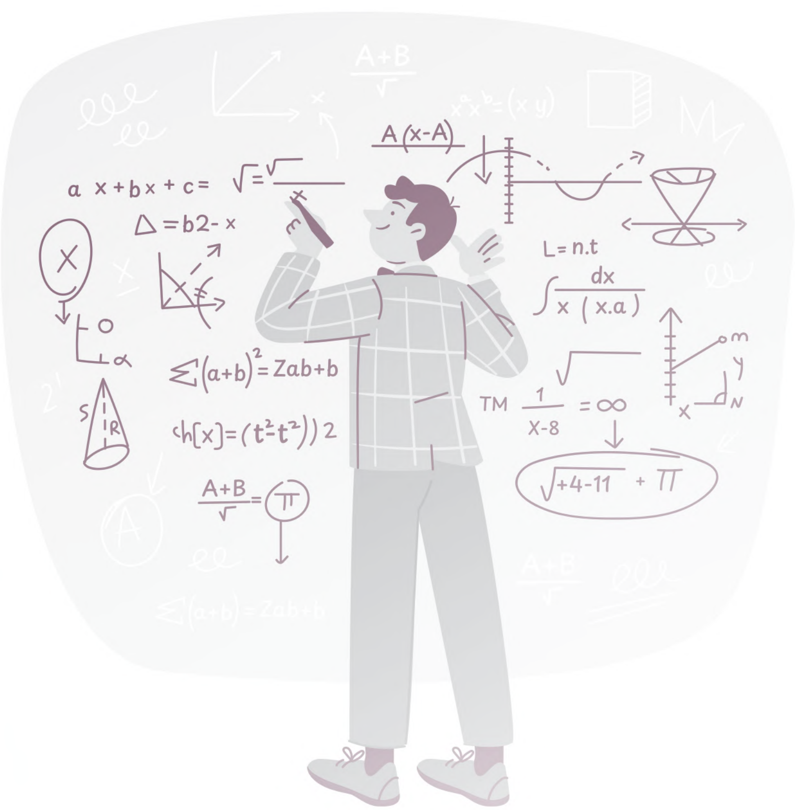
Código MATLAB para graficar f(x) con sus puntos críticos

```
% Definir la variable simbólica
syms x_sym;
f = sin(x_sym) - x_sym/2; % Definir la función

% Definir valores de x en un intervalo adecuado
x = linspace(-2*pi, 2*pi, 1000);
y = sin(x) - x/2;

% Graficar la función
plot(x, y, ’r’, ’LineWidth’, 2);
hold on; % Mantener la gráfica para añadir elementos

% Encontrar puntos críticos
%diff(f,x_sym); calcula la derivada de la función f’(x).
%solve(f_deriv == 0,x_sym); resuelve la ecuación f’(x)=0 para
 %encontrar los puntos críticos. double(...) convierte los
%resultados de simbólicos a valores numéricos.
%subs(f,x_sym,critical_points); evalúa f(x) en los puntos
   %críticos encontrados. double(...) convierte los resultados de
%simbólicos a valores numéricos para poder graficarlos.

f_deriv = diff(f, x_sym);
critical_points = double(solve(f_deriv == 0, x_sym));
f_values = double(subs(f, x_sym, critical_points));
```

```
% Graficar puntos críticos
plot(critical_points, f_values, 'bo', 'MarkerSize', 8, '
    MarkerFaceColor', 'b');

% Configurar ejes y etiquetas
XTicks([-2*pi, -3*pi/2, -pi, -pi/2, 0, pi/2, pi, 3*pi/2, 2*pi]);
xticklabels({'-2\pi','-3\pi/2','-\pi','-\pi/2','0','\pi/2','\pi','
    3\pi/2','2\pi'});
grid on;
xlabel('x (radianes)');
ylabel('f(x)');
title('Gráfica de \( f(x) = \sin(x) - x/2 \) con puntos críticos')
    ;
legend({'\( f(x) \)', 'Puntos críticos'}, 'Location', 'best');

hold off; % Liberar la gráfica para futuras figuras
```

CAPITULO 02

Cálculo Integral y sus Aplicaciones



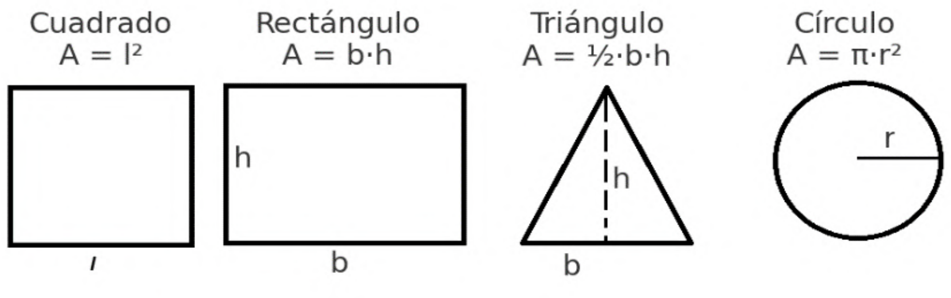
Cálculo Integral y sus Aplicaciones

2.1. Cálculo del área bajo una curva: una necesidad matemática histórica

Desde la antigüedad, uno de los grandes problemas que capturó el interés de matemáticos fue el cálculo de áreas de regiones delimitadas por curvas, especialmente cuando estas no podían reducirse a figuras geométricas simples como rectángulos, triángulos o círculos. Mientras que el área de un cuadrado o un círculo era bien conocida, el área comprendida bajo una curva general era mucho más difícil de abordar.

Figura 19

Ejemplos clásicos de áreas de figuras geométricas simples con fórmulas conocidas

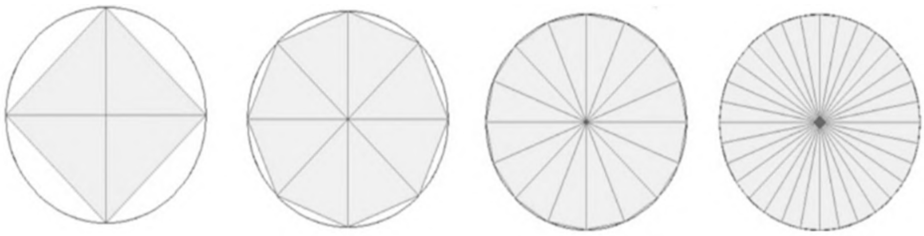


Nota: Autores (2026).

Los antiguos griegos, y en particular ***Eudoxo*** *y* ***Arquímedes****, desarrollaron el* ***método de exhaución****, una técnica de aproximación que consistía en inscribir y circunscribir figuras poligonales dentro de una figura curva, como un círculo, con el objetivo de aproximarse tanto como se quisiera al valor del área. Aunque carecían de una noción formal de límite, estos métodos pueden considerarse un precedente directo del cálculo integral moderno.*

Figura 20.

Método de exhaución: aproximación del área de una figura curva mediante polígonos inscritos y circunscritos, una técnica precursora del cálculo integral

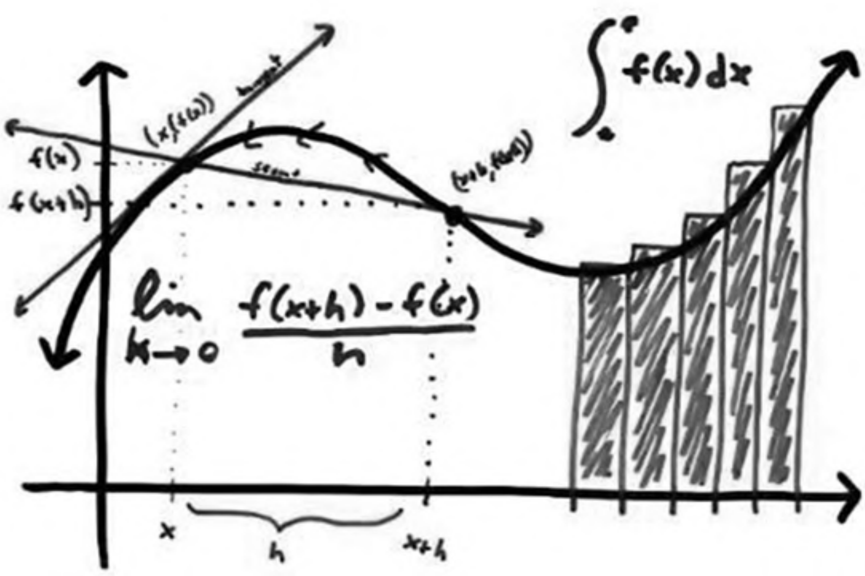


Nota: Autores (2026).

Durante el Renacimiento, con el surgimiento de problemas relacionados con la física, la astronomía y la ingeniería, el interés por cuantificar magnitudes variables creció significativamente. Sin embargo, fue recién en los siglos XVII y XVIII cuando **Newton** y **Leibniz**, de manera independiente, desarrollaron el **cálculo integral** como parte del cálculo infinitesimal. Ambos formalizaron la relación entre el área bajo una curva y la acumulación de cantidades infinitesimales, lo cual permitió resolver problemas clásicos como el área bajo una parábola, el cálculo de distancias recorridas a partir de velocidades variables, o el trabajo realizado por una fuerza no constante.

Figura 21.

Técnica precursora del cálculo diferencial e integral



Nota: Autores (2026).

2.2. Definición formal de área y el aporte de Bernhard Riemann

2.2.1. Definición formal del área en el cálculo

El concepto de *área* ha sido un pilar fundamental en la matemática y la geometría desde la antigüedad. En términos generales, el área de una región es una medida de la extensión bidimensional de una superficie. En el contexto del cálculo, el área bajo una curva de una función $f(x)$ en un intervalo $[a, b]$ se define a partir del *límite de sumas de aproximación*, lo que da origen a la **integral definida**.

En términos formales, podemos definir el área bajo una función positiva $f(x)$ en un intervalo $[a, b]$ como:

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f\,(x_i^*)\Delta x$$

donde $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ representa la anchura de los subintervalos en los que se divide el dominio.

Esta formulación nos conduce directamente al concepto de **sumas de Riemann**, una herramienta clave en la construcción del cálculo integral.

2.2.2. Bernhard Riemann y su contribución al cálculo

El matemático alemán **Bernhard Riemann (1826-1866)** fue una de las figuras más influyentes en el desarrollo del cálculo y el análisis matemático. Su mayor aporte en este contexto fue la formalización rigurosa de la integral mediante lo que hoy conocemos como *suma de Riemann*.

Riemann introdujo la idea de *aproximar el área bajo una curva mediante la suma de áreas de rectángulos pequeños* y luego tomar el límite cuando el número de rectángulos tiende a infinito. Este enfoque permitió establecer una base sólida para el concepto de integral definida, superando las limitaciones de los métodos geométricos previos.

Además de su trabajo en cálculo integral, Riemann dejó importantes contribuciones en teoría de funciones, geometría diferencial y física matemática, sentando las bases para el desarrollo de la teoría de la relatividad de Einstein.

2.2.3. Introducción a las sumas de Riemann

Dado un intervalo $[a, b]$, lo dividimos en n subintervalos de igual longitud:

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

Para cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$, se elige un punto x_i^* dentro del subintervalo y se evalúa la función en ese punto. Luego, se construyen rectángulos con base Δx y altura $f(x_i^*)$, sumando sus áreas para obtener una aproximación del área total:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f\,(x_i^*)\Delta x$$

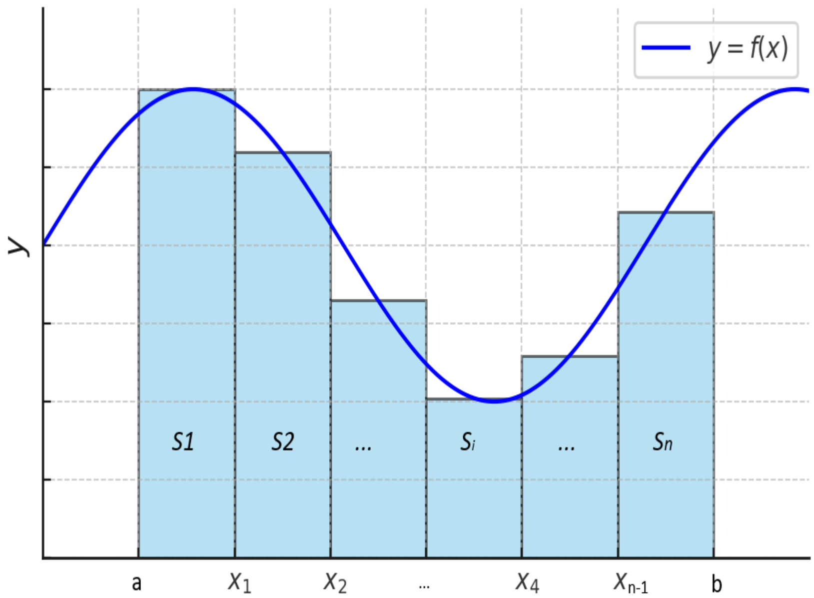
El valor de la integral definida se obtiene tomando el límite cuando $n \to \infty$:

$$\int_a^b f\,(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} S_n$$

Esta definición formaliza la integral y permite su aplicación a una amplia variedad de problemas en física, ingeniería y otras ciencias.

Figura 22.

Sumas de Riemann para la aproximación del área bajo una curva.



Nota: Autores (2026).

2.3. Aproximaciones de la integral y transición al límite

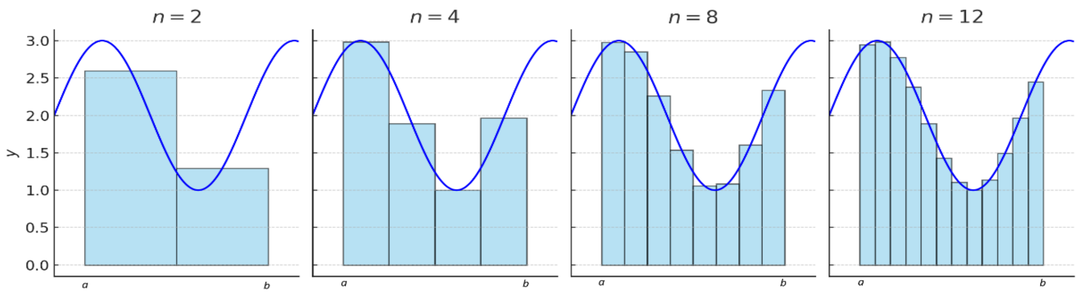
2.3.1. Aproximaciones con sumas de Riemann

Cuando se utiliza una cantidad *finita* de subdivisiones n en una suma de Riemann, la aproximación del área bajo la curva puede ser más o menos precisa dependiendo del número de particiones. Cuanto mayor sea n, más fiel será la estimación de la integral definida.

En la Figura 23, se muestra cómo varía la aproximación del área bajo la curva para diferentes valores de n. A medida que n aumenta, la diferencia entre la suma de Riemann y el valor exacto de la integral disminuye.

Figura 23.

Aproximaciones de la integral para diferentes valores de n.



Nota: Autores (2026).

2.3.2. Cálculo del área aproximada con 4 rectángulos

Para ilustrar el método, tomamos $n = 4$ rectángulos en el intervalo $[a, b]$. Cada rectángulo tiene un ancho:

$$\Delta x = \frac{b-a}{4}$$

y los puntos de evaluación son:

$$x_1 = a + \Delta x, \quad x_2 = a + 2\Delta x, \quad x_3 = a + 3\Delta x, \quad x_4 = b$$

La suma de Riemann para estos cuatro rectángulos se expresa como:

$$R_4 = f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + f(x_3)\Delta x + f(x_4)\Delta x$$

$$R_4 = \sum_{i=1}^{4} f\,(x_i)\Delta x$$

Esta expresión representa una aproximación del área bajo la curva. Conforme n aumenta, esta suma se acerca al valor exacto de la integral.

2.3.3. Límite de la suma de Riemann y la integral

Cuando el número de subdivisiones tiende a infinito ($n \to \infty$), el ancho de cada subintervalo Δx se vuelve infinitesimal y la suma de Riemann se convierte exactamente en la integral definida:

$$\int_a^b f\,(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f\,(x_i^*)\Delta x$$

Dividimos el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos:

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

Los puntos de evaluación en los extremos derechos de cada subintervalo son:

$$x_1 = a + \Delta x, \quad x_2 = a + 2\Delta x, \quad x_3 = a + 3\Delta x, \quad \dots, \quad x_n = a + n\Delta x$$

Cada rectángulo tiene un área:

$$f(x_i)\Delta x$$

Por lo que la suma de Riemann general se expresa como:

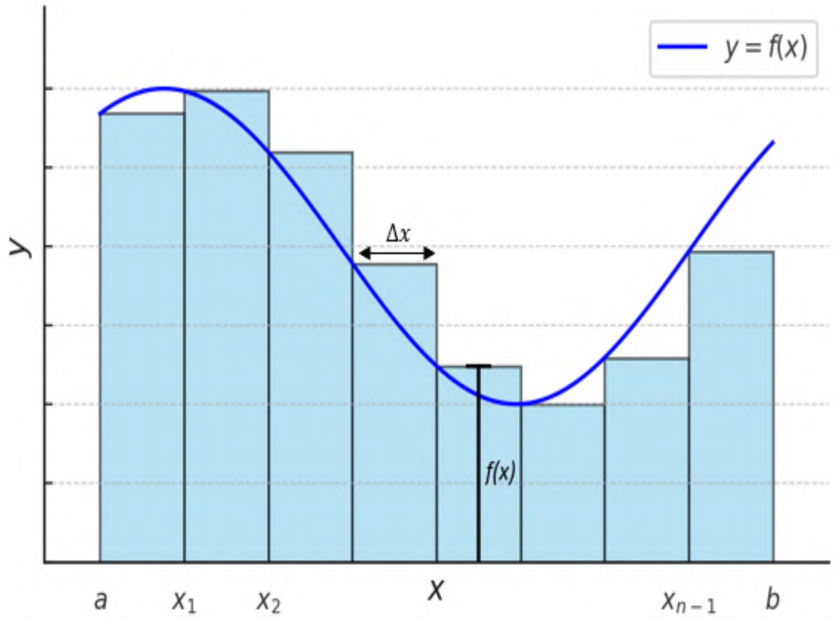
$$R_n = \sum_{i=1}^{n} f\,(x_i)\Delta x$$

Tomando el límite cuando $n \to \infty$, obtenemos la integral definida:

$$\int_a^b f\,(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f\,(x_i)\Delta x$$

Figura 24.

Partición del intervalo en función de Δx.



Nota: Autores (2026).

2.4. Métodos de sumas de Riemann

La aproximación de la integral definida mediante sumas de Riemann puede realizarse de tres maneras diferentes, dependiendo de los puntos de evaluación utilizados en cada subintervalo:

- **Suma con puntos derechos**: Se evalúa la función en el extremo derecho de cada subintervalo.
- **Suma con puntos izquierdos**: Se evalúa la función en el extremo izquierdo de cada subintervalo.
- **Suma con puntos medios**: Se evalúa la función en el punto medio de cada subintervalo.

2.4.1. Definición formal y fórmulas

Dado un intervalo $[a, b]$ dividido en n subintervalos de igual longitud:

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

Los puntos de evaluación se definen de la siguiente manera:

- **Suma con puntos derechos:**

$$S(f, P_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{b-a}{n} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right)$$

- **Suma con puntos izquierdos**:

$$S(f, P_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{b-a}{n} f\left(a + (i-1)\frac{b-a}{n}\right)$$

- **Suma con puntos medios**:

$$S(f, P_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{b-a}{n} f\left(a + (i-1)\frac{b-a}{n} + \frac{b-a}{2n}\right)$$

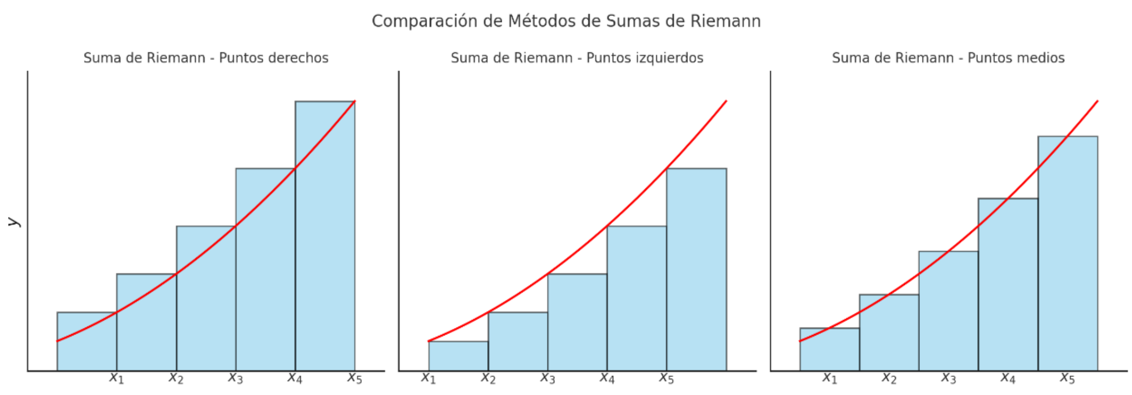
Cada una de estas expresiones nos proporciona una aproximación del área bajo la curva, siendo la suma con puntos medios generalmente la más precisa para una cantidad finita de subintervalos.

2.4.2. Comparación de métodos

En la Figura 25, se presentan las tres formas de calcular la suma de Riemann aplicadas a la función $f(x) = x^2$. Se observa que conforme el número de subintervalos aumenta, las diferencias entre los métodos disminuyen.

Figura 25.

Comparación de las sumas de Riemann con puntos derechos, izquierdos y medios



Nota: Autores (2026).

2.5. Ejemplo numérico comparativo

Para ilustrar la aplicación de las sumas de Riemann, consideremos la función:

$$f(x) = e^{-x}$$

en el intervalo $[0,2]$ con $n = 5$ subintervalos.

2.5.1. Cálculo de Δx

El ancho de cada subintervalo es:

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{2-0}{5} = 0.4$$

2.5.2. Cálculo de las sumas de Riemann

Suma con puntos derechos

Los puntos de evaluación se ubican en el extremo derecho de cada subintervalo:

$$x_i = a + i\Delta x = 0 + i(0.4)$$

para $i = 1,2,3,4,5$, obteniendo:

$$x_1 = 0.4, \quad x_2 = 0.8, \quad x_3 = 1.2, \quad x_4 = 1.6, \quad x_5 = 2.0$$

La suma de Riemann con puntos derechos es:

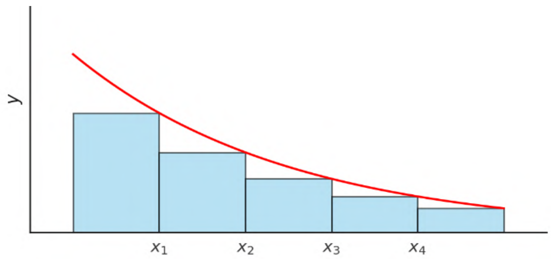
$$R_{\text{der}} = \sum_{i=1}^{5} f(x_i)\Delta x = 0.4(e^{-0.4} + e^{-0.8} + e^{-1.2} + e^{-1.6} + e^{-2.0})$$

Evaluando los valores numéricos:

$$R_{\text{der}} \approx 0.4(0.6703 + 0.4493 + 0.3012 + 0.2019 + 0.1353) = 0.4(1.758) = 0.7032$$

Figura 26.

Método de Riemann por puntos derechos e^(-x).



Nota: Autores (2026).

Suma con puntos izquierdos

Los puntos de evaluación están en el extremo izquierdo de cada subintervalo:

$$x_i = a + (i - 1)\Delta x = 0 + (i - 1)(0.4)$$

para $i = 1,2,3,4,5$, obteniendo:

$$x_1 = 0.0, \quad x_2 = 0.4, \quad x_3 = 0.8, \quad x_4 = 1.2, \quad x_5 = 1.6$$

La suma de Riemann con puntos izquierdos es:

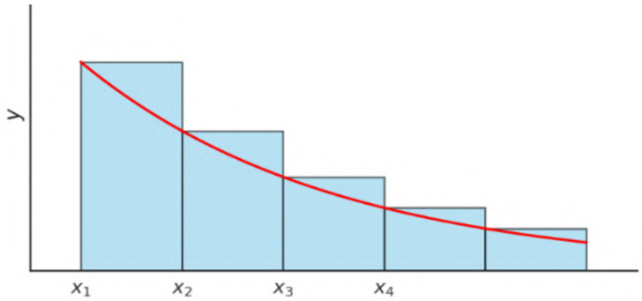
$$R_{\text{izq}} = \sum_{i=1}^{5} f\,(x_i)\Delta x = 0.4(e^0 + e^{-0.4} + e^{-0.8} + e^{-1.2} + e^{-1.6})$$

Sustituyendo valores numéricos:

$$R_{\text{izq}} \approx 0.4(1 + 0.6703 + 0.4493 + 0.3012 + 0.2019) = 0.4(2.6227) = 1.0491$$

Figura 27.

Método de Riemann por puntos izquierdos e^(-x).



Nota: Autores (2026).

Suma con puntos medios

Los puntos de evaluación están en la mitad de cada subintervalo:

$$x_i = a + (i - 1)\Delta x + \frac{\Delta x}{2} = 0 + (i - 1)(0.4) + 0.2$$

para $i = 1,2,3,4,5$, obteniendo:

$$x_1 = 0.2, \quad x_2 = 0.6, \quad x_3 = 1.0, \quad x_4 = 1.4, \quad x_5 = 1.8$$

La suma de Riemann con puntos medios es:

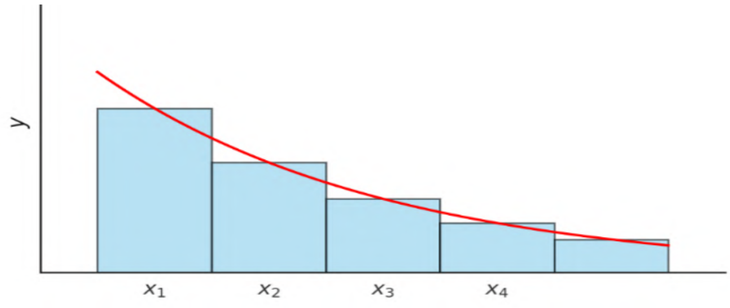
$$R_{\text{med}} = \sum_{i=1}^{5} f\,(x_i)\Delta x = 0.4(e^{-0.2} + e^{-0.6} + e^{-1.0} + e^{-1.4} + e^{-1.8})$$

Sustituyendo valores numéricos:

$$R_{\text{med}} \approx 0.4(0.8187 + 0.5488 + 0.3679 + 0.2466 + 0.1653) = 0.4(2.1473)$$
$$= 0.8589$$

Figura 28.

Método de Riemann por puntos izquierdos e^(-x).



Nota: Autores (2026).

Valor exacto de la integral

El valor exacto de la integral definida es:

$$\int_0^2 e^{-x}\,dx = [-e^{-x}]_0^2 = -(e^{-2} - e^0)$$

$$= -(0.1353 - 1) = 0.8647$$

Comparación de resultados

Los resultados obtenidos se presentan en la Tabla 2

Tabla 3.

Comparación de los métodos de sumas de Riemann para e^(-x).

Método	Aproximación	Error absoluto
Puntos derechos	0.7032	0.1615
Puntos izquierdos	1.0491	0.1844
Puntos medios	0.8589	0.0058

Método	Aproximación	Error absoluto
Valor exacto	0.8647	0.0000

Nota: Autores (2026).

De los tres métodos, la suma de Riemann con **puntos medios** proporciona la mejor aproximación con un error absoluto de 0.0058. La peor aproximación en este caso proviene de la suma con **puntos izquierdos**, con un error de 0.1844.

Esto se debe a que los métodos de puntos derechos e izquierdos evalúan la función en los extremos del subintervalo, lo que puede sobreestimar o subestimar sistemáticamente el área bajo la curva dependiendo de si la función es creciente o decreciente. En cambio, el método de puntos medios tiende a compensar los errores de subestimación y sobreestimación, generando una mejor aproximación al valor real de la integral.

2.6. Límite de sumas de Riemann y el uso de sumatorios

La definición de la integral definida está basada en la idea de una suma de Riemann cuyo número de subintervalos tiende a infinito. Formalmente, la integral definida se expresa como:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$$

Para evaluar este tipo de sumas, es fundamental conocer las propiedades básicas de los sumatorios y las reglas algebraicas que permiten operar con ellos.

2.6.1. Propiedades básicas de los sumatorios

Los sumatorios poseen una serie de propiedades fundamentales que permiten su manipulación algebraica:

- $\sum_{i=1}^{n} c = nc$, donde c es una constante.
- $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$
- $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

- $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$
- $\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$

2.6.2.Reglas para operar con sumatorios

Al operar con sumatorios, es esencial aplicar las siguientes propiedades, que permiten descomponer y reorganizar sumas de manera conveniente:

$$\sum_{i=1}^{n} c = nc$$

$$\sum_{i=1}^{n} c\, a_i = c \sum_{i=1}^{n} a_i$$

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$$

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i - b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{n} b_i$$

Estas reglas son clave para resolver sumas de Riemann y obtener resultados simbólicos que puedan ser evaluados en el límite cuando $n \to \infty$.

2.6.3.Cambio de variable en los sumatorios

Para resolver sumas de Riemann de manera algebraica, es común realizar un cambio de variable en la expresión de los puntos de evaluación x_i. Usualmente, estos se expresan como (ver apartado 2.4.1):

$$x_i = a + i\Delta x, \quad \text{donde } \Delta x = \frac{b-a}{n}$$

Reemplazando esto en la definición de la suma de Riemann:

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \sum_{i=1}^{n} f\left(a + i \cdot \frac{b-a}{n}\right) \cdot \frac{b-a}{n}$$

en una expresión completamente dependiente de i, lo que permite aplicar las propiedades de los sumatorios y posteriormente calcular el límite cuando $n \to \infty$.

Este proceso es clave para demostrar formalmente la convergencia de la suma de Riemann a la integral definida y se usa frecuentemente en contextos matemáticos y de modelado numérico.

2.7. Ejemplo de cálculo del límite de una suma de Riemann

Ejemplo 1

Para ilustrar la aplicación del límite en las sumas de Riemann, consideremos la función:

$$f(x) = x^2$$

en el intervalo $[0,1]$. Queremos calcular la integral definida:

$$\int_0^1 x^2 \, dx$$

usando la definición de suma de Riemann y evaluando su límite cuando $n \to \infty$.

Paso 1: Definir los subintervalos y los puntos de evaluación

El intervalo $[0,1]$ se divide en n subintervalos de ancho:

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{n} = \frac{1}{n}$$

Los puntos de evaluación se eligen en los extremos derechos de cada subintervalo:

$$x_i = a + i\Delta x = 0 + i \cdot \frac{1}{n} = \frac{i}{n}, \quad \text{para } i = 1,2,3,\dots,n$$

Paso 2: Plantear la suma de Riemann

Sustituyendo $f(x) = x^2$ en la definición de suma de Riemann:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n}$$

Expandiendo:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{i^2}{n^2} \cdot \frac{1}{n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{i^2}{n^3}$$

Paso 3: Evaluar la suma utilizando la propiedad de sumatorios

Usamos la fórmula:

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

para sustituir en la suma:

$$S_n = \frac{1}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Simplificamos:

$$S_n = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}$$

Paso 4: Evaluar el límite cuando $n \to \infty$

Tomamos el límite:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}$$

Dividimos numerador y denominador por n^2:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{(1+\frac{1}{n})(2+\frac{1}{n})}{6}$$

Cuando $n \to \infty$, los términos $\frac{1}{n} \to 0$, por lo que obtenemos:

$$\frac{(1)(2)}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Por lo tanto, el valor de la integral definida es:

$$\int_0^1 x^2 \, dx = \frac{1}{3}$$

Este resultado confirma que el límite de la suma de Riemann coincide con el valor exacto de la integral.

Ejemplo 2

Ahora, consideremos una función de mayor complejidad:

$$f(x) = x^3 + 2x$$

en el intervalo $[0,3]$. Queremos calcular:

$$\int_0^3 (x^3 + 2x)\, dx$$

usando la suma de Riemann y su límite.

Paso 1: Definir los subintervalos y los puntos de evaluación

El intervalo $[0,3]$ se divide en n subintervalos de ancho:

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{3-0}{n} = \frac{3}{n}$$

Los puntos de evaluación se eligen en los extremos derechos de cada subintervalo:

$$x_i = a + i\Delta x = 0 + i \cdot \frac{3}{n} = \frac{3i}{n}, \quad \text{para } i = 1,2,3,\dots,n$$

Paso 2: Plantear la suma de Riemann

Sustituyendo $f(x) = x^3 + 2x$ en la definición de suma de Riemann:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \sum_{i=1}^{n} \left(\left(\frac{3i}{n}\right)^3 + 2 \cdot \frac{3i}{n} \right) \cdot \frac{3}{n}$$

Expandiendo:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{27i^3}{n^3} + \frac{6i}{n} \right) \cdot \frac{3}{n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{81i^3}{n^4} + \sum_{i=1}^{n} \frac{18i}{n^2}$$

Paso 3: Evaluar la suma utilizando la propiedad de sumatorios

Usamos las fórmulas:

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2, \quad \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

para sustituir en la suma:

$$S_n = \frac{81}{n^4} \cdot \left(\frac{n^2(n+1)^2}{4}\right) + \frac{18}{n^2} \cdot \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)$$

Simplificamos:

$$S_n = \frac{81(n+1)^2}{4n^2} + \frac{18(n+1)}{2n}$$

Paso 4: Evaluar el límite cuando $n \to \infty$

Tomamos el límite:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{81(n+1)^2}{4n^2} + \frac{18(n+1)}{2n}\right)$$

Dividimos numerador y denominador por n^2:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{81(1+\frac{1}{n})^2}{4} + \frac{18}{2}(1+\frac{1}{n})\right)$$

Cuando $n \to \infty$, los términos $\frac{1}{n} \to 0$, por lo que obtenemos:

$$\frac{81}{4} + \frac{18}{2} = \frac{117}{4}$$

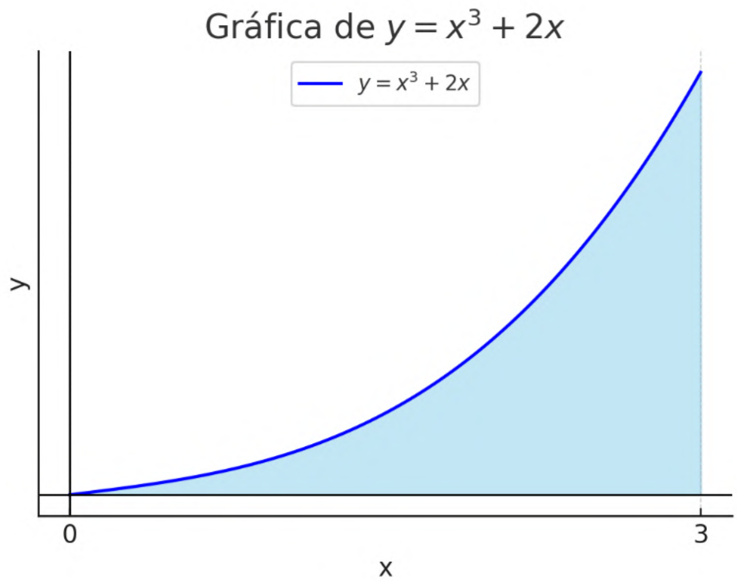
Por lo tanto, el valor de la integral definida es:

$$\int_0^3 (x^3 + 2x)\, dx = \frac{117}{4}$$

Este resultado confirma nuevamente que el límite de la suma de Riemann coincide con el valor exacto de la integral.

Figura 29

Método de Riemann con limite al infinito



Nota: Autores (2026).

2.8. Método Trapezoidal: Una Alternativa a la Suma de Riemann

El método de sumas de Riemann proporciona una manera de aproximar el área bajo una curva dividiendo el intervalo en subintervalos y utilizando rectángulos. Sin embargo, una aproximación más precisa puede lograrse utilizando el **método del trapecio**, el cual se basa en la aproximación de la región bajo la curva mediante trapecios en lugar de rectángulos.

2.8.1. Definición del Método Trapezoidal

En lugar de aproximar la función con una serie de rectángulos, el método trapezoidal utiliza segmentos lineales para conectar los puntos de evaluación en cada subintervalo. De este modo, el área bajo la curva se estima mediante una suma de áreas de trapecios. Matemáticamente, se define como:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{\Delta x}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(f(x_{i-1}) + f(x_i)\right)$$

donde $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ es la longitud de cada subintervalo, y $x_0, x_1, \dots, x_n$ son los puntos de partición del intervalo $[a, b]$.

2.8.2. Comparación con la Suma de Riemann

A diferencia de la suma de Riemann, que usa alturas constantes en cada subintervalo, el método trapezoidal toma en cuenta dos valores de la función por subintervalo, proporcionando una mejor aproximación del área bajo la curva. Como resultado, este método reduce el error de aproximación en comparación con la regla de los rectángulos.

2.9. Método Trapezoidal: Una Alternativa a la Suma de Riemann

El método de sumas de Riemann proporciona una manera de aproximar el área bajo una curva dividiendo el intervalo en subintervalos y utilizando rectángulos. Sin embargo, una aproximación más precisa puede lograrse utilizando el **método del trapecio**, el cual se basa en la aproximación de la región bajo la curva mediante trapecios en lugar de rectángulos.

2.9.1. Fundamentación Matemática del Método Trapezoidal

El método trapezoidal se basa en la idea de aproximar el área bajo una curva mediante trapecios en lugar de rectángulos. Cada subintervalo de la partición se modela como un trapecio, donde la base inferior corresponde al ancho del subintervalo, y las alturas son los valores de la función en los extremos del subintervalo.

Para justificar la fórmula fundamental del método trapezoidal, consideremos la descomposición del área del trapecio en dos partes:

- Un **rectángulo** de base Δx y altura B, cuya área es:

$$A_{\text{rectángulo}} = \Delta x \cdot B$$

- Un **triángulo** de base Δx y altura $B - b$, cuya área es:

$$A_{\text{triángulo}} = \frac{1}{2} \cdot \Delta x \cdot (b - B)$$

Sumando ambas áreas, obtenemos el área total del trapecio:

$$A_{\text{trapecio}} = A_{\text{rectángulo}} + A_{\text{triángulo}}$$

Sustituyendo las expresiones anteriores:

$$A_{\text{trapecio}} = \Delta x \cdot B + \frac{1}{2} \cdot \Delta x \cdot (b - B)$$

Factorizando Δx:

$$A_{\text{trapecio}} = \frac{\Delta x}{2}(B + b)$$

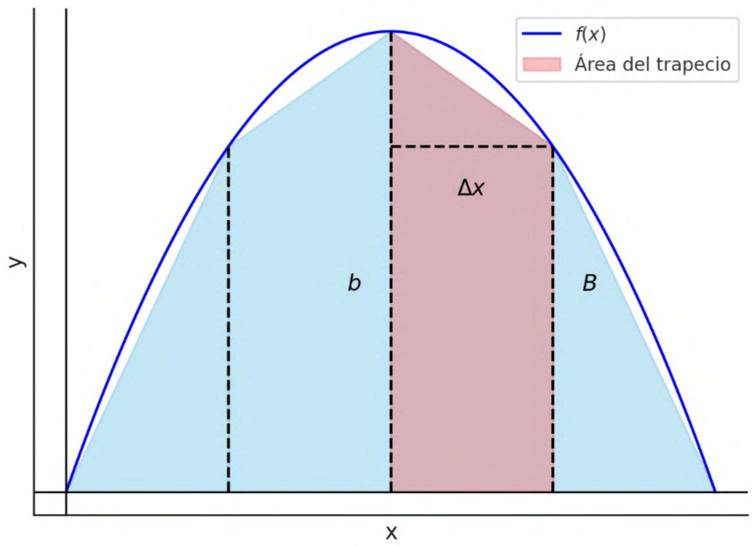
Que es precisamente la fórmula base del método trapezoidal:

$$\int_a^b f\,(x)\,dx \approx \frac{\Delta x}{2} \sum_{i=1}^{n} (f\,(x_{i-1}) + f\,(x_i))$$

Esta justificación confirma que el método trapezoidal es una extensión más precisa de la suma de Riemann, ya que considera tanto el valor inicial como el final de cada subintervalo, lo que proporciona una mejor aproximación del área bajo la curva.

Figura 30.

Descomposición del trapecio en un rectángulo y un triángulo



Nota: Autores (2026).

2.9.1.1. Fundamentación Matemática del Método Trapezoidal

El método trapezoidal se basa en la idea de aproximar el área bajo una curva mediante trapecios en lugar de rectángulos. Cada subintervalo de la partición se modela como un trapecio, donde la base inferior corresponde al ancho del subintervalo, y las alturas son los valores de la función en los extremos del subintervalo.

Una manera más general de expresar este método es utilizando la siguiente fórmula:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \Delta x\left(\frac{f(x_0)+f(x_1)}{2}+\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}+\cdots+\frac{f(x_{n-1})+f(x_n)}{2}\right)$$

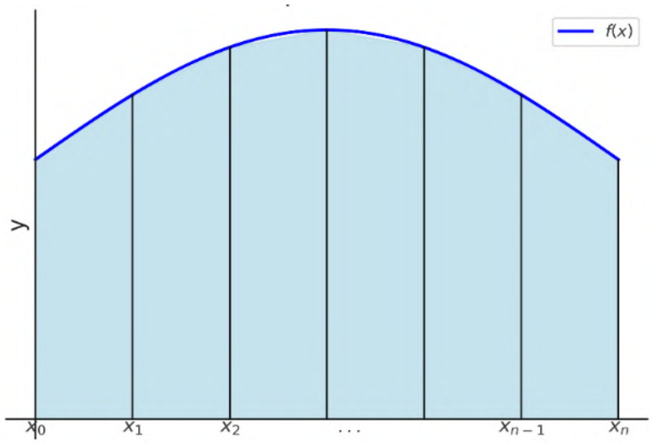
Que, al reorganizar términos, se puede expresar como:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{\Delta x}{2}\left(f(x_0)+2f(x_1)+2f(x_2)+\cdots+2f(x_{n-1})+f(x_n)\right)$$

Esta expresión nos muestra que la aproximación del área total se obtiene sumando los valores de la función evaluados en los extremos de cada subintervalo y multiplicándolos por un peso correspondiente.

Figura 31.

Representación del método trapezoidal con subdivisión en trapecios.



Nota: Autores (2026).

2.10. Ejemplos de Aplicación del Método Trapezoidal

En esta sección, aplicaremos el método trapezoidal para aproximar integrales definidas y compararemos los resultados con el valor exacto de la integral.

2.10.1. Ejemplo 1: Función Exponencial

Aproximemos la siguiente integral definida usando el método trapezoidal con $n = 5$ subintervalos:

$$I = \int_0^2 e^{-x} \, dx$$

Paso 1: Cálculo del Incremento Δx

El incremento se obtiene con la fórmula:

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{2-0}{5} = 0.4$$

Paso 2: Determinación de los Puntos $\mathbf{x_i}$

Los puntos de evaluación se calculan como:

$$x_i = a + i\Delta x, \quad \text{para } i = 0,1,2,3,4,5$$

Dando como resultado:

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 0.4, \quad x_2 = 0.8, \quad x_3 = 1.2, \quad x_4 = 1.6, \quad x_5 = 2.0$$

Paso 3: Aplicación de la Fórmula del Método Trapezoidal

Usamos la expresión general:

$$I \approx \frac{\Delta x}{2}[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + 2f(x_3) + 2f(x_4) + f(x_5)]$$

Sustituyendo los valores de $f(x) = e^{-x}$:

$$I \approx \frac{0.4}{2}[e^0 + 2e^{-0.4} + 2e^{-0.8} + 2e^{-1.2} + 2e^{-1.6} + e^{-2.0}]$$

Evaluamos numéricamente:

$$I \approx \frac{0.4}{2}[1 + 2(0.6703) + 2(0.4493) + 2(0.3012) + 2(0.2019) + 0.1353]$$

$$I \approx \frac{0.4}{2}(3.3804)$$

$$I \approx 0.6761$$

Paso 4: Comparación con el Valor Exacto

La integral exacta es:

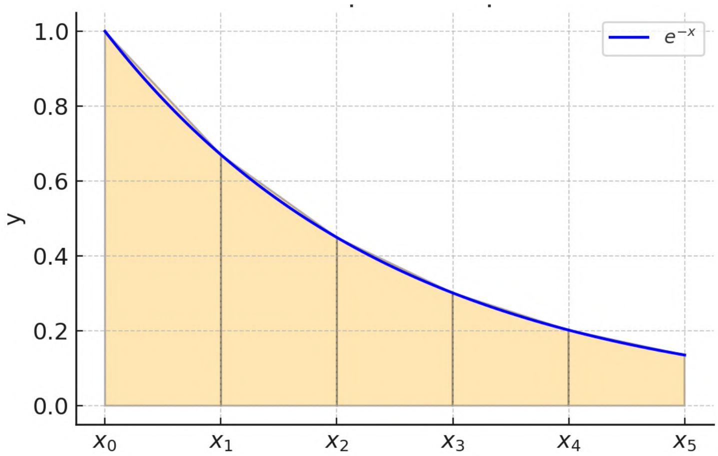
$$I_{\text{exacto}} = \int_0^2 e^{-x} \, dx = [-e^{-x}]_0^2 = 1 - e^{-2} \approx 0.8647$$

El error del método trapezoidal es:

$$|I - I_{\text{exacto}}| = |0.6761 - 0.8647| = 0.1886$$

Figura 32.

Representación gráfica del método trapezoidal aplicado a e^(-x).



Nota: Autores (2026).

2.10.2. Ejemplo 2: Función Polinómica

Aproximemos la siguiente integral definida usando el método trapezoidal con $n = 5$ subintervalos:

$$I = \int_0^2 (x^3 - 4x^2 + 2x + 1)\, dx$$

Paso 1: Cálculo del Incremento Δx

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{2-0}{5} = 0.4$$

Paso 2: Determinación de los Puntos x_i

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 0.4, \quad x_2 = 0.8, \quad x_3 = 1.2, \quad x_4 = 1.6, \quad x_5 = 2.0$$

Paso 3: Aplicación de la Fórmula del Método Trapezoidal

Sustituyendo $f(x) = x^3 - 4x^2 + 2x + 1$:

$$I \approx \frac{0.4}{2}[f(0) + 2f(0.4) + 2f(0.8) + 2f(1.2) + 2f(1.6) + f(2.0)]$$

Evaluamos numéricamente:

$$I \approx 0.8$$

Paso 4: Comparación con el Valor Exacto

La integral exacta es:

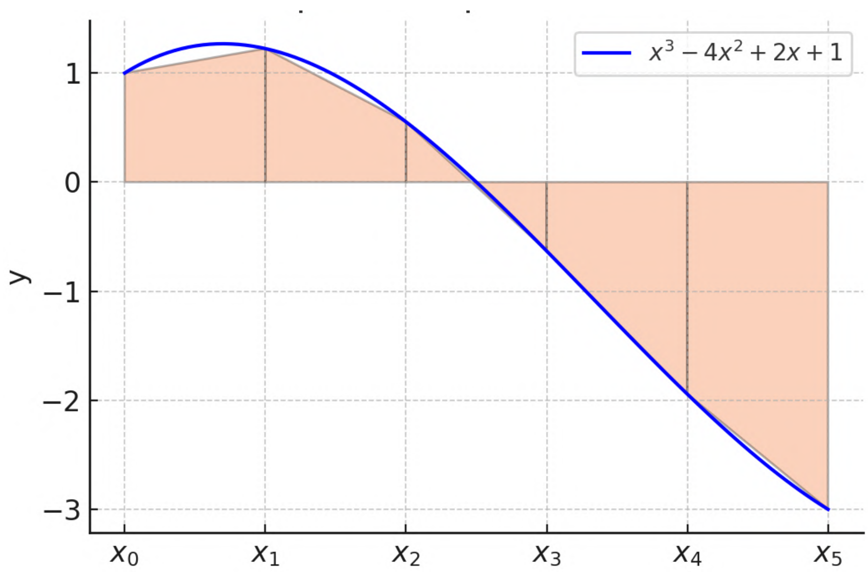
$$I_{\text{exacto}} = \int_0^2 (x^3 - 4x^2 + 2x + 1)\, dx \approx 0.9333$$

Error:

$$|I - I_{\text{exacto}}| = |0.8 - 0.9333| = 0.1333$$

Figura 33.

Representación gráfica del método trapezoidal.



Nota: Autores (2026).

2.11. La Integral Indefinida como Función Primitiva

Hasta ahora hemos abordado la integral definida como una suma de Riemann que permite calcular el área bajo la curva de una función entre dos puntos. Sin embargo, existe otro enfoque fundamental del cálculo integral: la **integral indefinida**, también conocida como *función primitiva*.

2.11.1. ¿Qué es una integral indefinida?

La integral indefinida de una función $f(x)$ es otra función $F(x)$, cuya derivada es igual a $f(x)$. Es decir, si:

$$F'(x) = f(x)$$

Entonces se dice que:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

donde C es una constante arbitraria, conocida como **constante de integración**, ya que derivar cualquier constante da cero.

Ejemplo: Derivación e Integración con Constante

Considérese la función:

$$F(x) = x^2 + C$$

Donde C es una constante. Si derivamos esta función:

$$F'(x) = \frac{d}{dx}(x^2 + C) = 2x$$

Observamos que la constante desaparece al derivar, ya que la derivada de cualquier número constante es cero. Es decir, todas las funciones de la forma $x^2 + C$ tienen como derivada la misma expresión $2x$, independientemente del valor de C.

Por tanto, al realizar la operación inversa (integración), no podemos recuperar el valor original de la constante. Esto da lugar a una **familia de funciones**.

$$\int 2x\,dx = x^2 + C$$

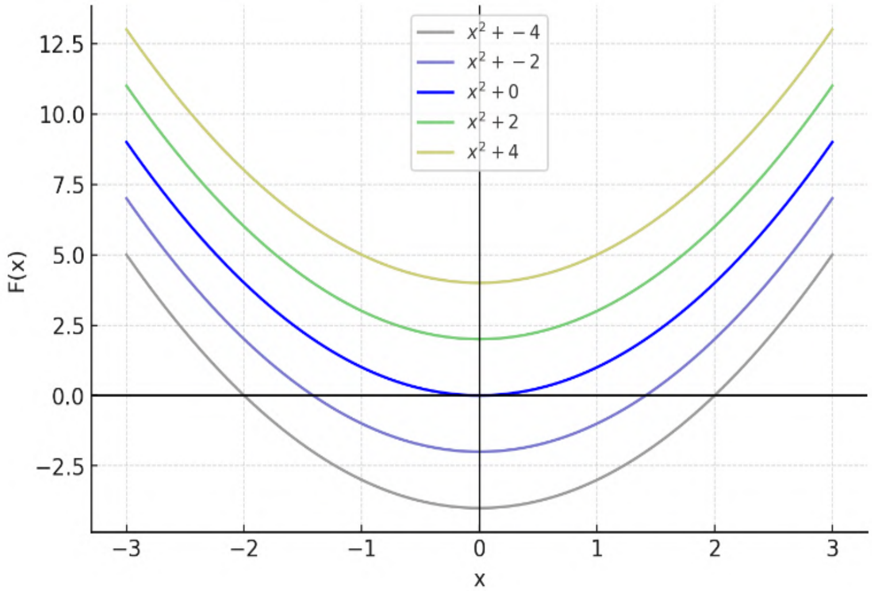
Donde $C \in \mathbb{R}$ puede ser cualquier número real.

Interpretación geométrica

Geométricamente, cada función primitiva $F(x) = x^2 + C$ representa una parábola que se desplaza verticalmente según el valor de C, pero todas comparten la misma pendiente (derivada) en cada punto x. Esto se puede visualizar como una familia de curvas paralelas.

Figura 34.

Familia de funciones primitivas de 2x: x^2+C.



Nota: Autores (2026).

2.11.2. Relación práctica entre integral definida e indefinida: Teorema Fundamental del Cálculo

El vínculo entre la integral definida y la indefinida está dado por el **Teorema Fundamental del Cálculo**, el cual establece que si $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$, entonces:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Esto significa que, si conocemos una función cuya derivada es igual a la función que queremos integrar, podemos calcular el área bajo la curva simplemente evaluando dicha función en los extremos del intervalo. Este resultado conecta el cálculo diferencial con el cálculo integral y nos permite resolver integrales definidas sin necesidad de construir sumas de Riemann o usar métodos numéricos.

Interpretación geométrica: El valor de $\int_a^b f(x)\,dx$ representa el área neta bajo la curva $f(x)$ entre $x = a$ y $x = b$. La primitiva $F(x)$ representa una familia de funciones cuya pendiente en cada punto coincide con la de $f(x)$. El valor $F(b) -$

$F(a)$ corresponde a la diferencia de alturas de esa función acumulativa entre los extremos del intervalo, lo cual equivale al área bajo $f(x)$.

Ejemplo 1: Calculemos la siguiente integral definida usando primitivas:

$$\int_0^2 (3x^2 + 2x)\, dx$$

Buscamos una función cuya derivada sea $f(x) = 3x^2 + 2x$:

$$F(x) = x^3 + x^2$$

Aplicamos el Teorema Fundamental del Cálculo:

$$\int_0^2 (3x^2 + 2x)\, dx = F(2) - F(0) = (8 + 4) - (0 + 0) = 12$$

Ejemplo 2:

$$\int_1^3 (4x - 5)\, dx$$

Buscamos la primitiva de $f(x) = 4x - 5$:

$$F(x) = 2x^2 - 5x$$

Evaluamos en los extremos:

$$F(3) = 2(3)^2 - 5(3) = 18 - 15 = 3 \\   F(1) = 2(1)^2 - 5(1) = 2 - 5 = -3$$

Entonces:

$$\int_1^3 (4x - 5) dx = F(3) - F(1) = 3 - (-3) = 6$$

Observación importante: El resultado representa el área neta, es decir, si la función es negativa en alguna parte del intervalo, la integral contará esa área como negativa. Si se desea el área total (sin importar si está por encima o por debajo del eje), debe calcularse $\int_a^b |f(x)| dx$.

2.11.3. Ejemplos de Derivación de la Fórmula General

En esta sección se mostrará cómo se puede deducir la fórmula general para la integral indefinida de una función potencia $f(x)$, a partir del concepto de suma de Riemann. Este enfoque refuerza el vínculo entre el concepto geométrico de área y el análisis algebraico.

Demostración 1 de $\int x^n dx$ usando suma de Riemann

Deseamos calcular la integral indefinida:

$$\int x^n dx$$

mediante el uso de sumas de Riemann y tomando el límite cuando el número de subintervalos tiende a infinito.

Paso 1: Definir la partición del intervalo

Dividimos el intervalo $[0,1]$ en n subintervalos de igual ancho:

$$\Delta x = \frac{1-0}{n} = \frac{1}{n}$$

Los puntos de evaluación serán los extremos derechos de cada subintervalo:

$$x_i = \frac{i}{n} \quad \text{para } i = 1,2,\dots,n$$

Paso 2: Escribir la suma de Riemann

La integral se aproxima mediante la suma de Riemann:

$$\int_0^1 x^n\, dx \approx \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)\cdot\frac{1}{n} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^n\cdot\frac{1}{n}$$

Factorizamos los términos constantes:

$$\int_0^1 x^n\, dx \approx \frac{1}{n^{n+1}}\sum_{i=1}^{n} i^n$$

Paso 3: Evaluar el límite usando una aproximación integral

Queremos aproximar la suma $\sum_{i=1}^{n} i^n$. En lugar de usar una fórmula cerrada, recurrimos a una idea geométrica: la integral definida de x^n desde 0 hasta n, que representa una suma continua:

$$\sum_{i=1}^{n} i^n \approx \int_0^n x^n\, dx = \frac{n^{n+1}}{n+1}$$

Sustituyendo esta aproximación en la suma de Riemann obtenida previamente:

$$\int_0^1 x^n\,dx \approx \frac{1}{n^{n+1}} \cdot \frac{n^{n+1}}{n+1} = \frac{1}{n+1}$$

Esta técnica permite deducir intuitivamente el resultado de la integral sin necesidad de fórmulas exactas para sumas finitas, mostrando el vínculo entre área continua y suma discreta.

Paso 4: Generalización para cualquier intervalo

Si en lugar de $[0,1]$ consideramos $\int x^n dx$ sin límites, el resultado se generaliza como:

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad \text{para } n \neq -1$$

Esta fórmula corresponde a la regla de integración de funciones potencia, y es una de las más fundamentales en el cálculo integral.

2.11.3.1. Demostración 2 de $\int e^x dx$ usando suma de Riemann

Una fórmula clásica de la tabla de integrales es:

$$\int e^x dx = e^x + C$$

Esta fórmula puede ser justificada a partir del concepto de suma de Riemann.

Paso 1: Plantear la integral definida

Consideramos la integral definida:

$$\int_0^1 e^x\,dx$$

Dividimos el intervalo $[0,1]$ en n subintervalos de igual longitud:

$$\Delta x = \frac{1}{n}, \quad x_i = \frac{i}{n}$$

Paso 2: Aproximación con suma de Riemann

La suma de Riemann con extremos derechos es:

$$\int_0^1 e^x\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} e^{x_i}\cdot \Delta x = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} e^{\frac{i}{n}}$$

Paso 3: Tomar el límite

Al tomar el límite cuando $n \to \infty$, esta suma se convierte en la definición de la integral:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} e^{\frac{i}{n}} = \int_0^1 e^x\,dx$$

Aquí no podemos operar el sumatorio de forma exacta como ocurre con sumas del tipo $\sum i$ o $\sum i^2$, porque **no existe una expresión algebraica cerrada para $\sum e^{i/n}$**. Esta no es una progresión aritmética ni geométrica. En cambio, reconocemos que este tipo de sumas es precisamente lo que define una integral como el límite de una suma de Riemann.

El valor exacto de esta integral es:

$$\int_0^1 e^x\,dx = e - 1$$

Paso 4: Generalización

Este resultado se puede extender al intervalo general $[a, b]$:

$$\int_a^b e^x\,dx = e^b - e^a$$

Lo cual demuestra que la función e^x tiene como primitiva a sí misma, y por tanto:

$$\int e^x dx = e^x + C$$

2.11.4. Reglas básicas de integración

Las reglas básicas de integración permiten calcular primitivas de funciones elementales. Estas reglas se derivan directamente de las derivadas conocidas y de las propiedades de la integral.

- $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1$

- $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$
- $\int e^x dx = e^x + C$
- $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, a > 0, a \neq 1$
- $\int \cos x dx = \sin x + C$
- $\int \sin x dx = -\cos x + C$
- $\int \sec^2 x dx = \tan x + C$
- $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C$

2.11.5. Propiedades de las integrales

Una vez entendida la integral definida como límite de una suma de Riemann, es importante estudiar las propiedades fundamentales que rigen su comportamiento. Estas propiedades permiten simplificar cálculos, estructurar reglas de integración y comprender mejor el comportamiento del área bajo una curva.

1. Linealidad

$$\int_a^b c \cdot f(x)\, dx = c \cdot \int_a^b f(x)\, dx$$

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx$$

Ejemplo:

$$\int_1^2 (2x + 3) dx = \int_1^2 2\, x\, dx + \int_1^2 3\ dx = 2 \cdot \frac{x^2}{2} |_1^2 + 3x|_1^2 = (4 - 1) + (6 - 3) = 6$$

2. Aditividad del intervalo

Si $a < c < b$:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx$$

Ejemplo:

$$\int_0^2 x^2\,dx = \int_0^1 x^2\,dx + \int_1^2 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 + \frac{x^3}{3}\Big|_1^2 = \frac{1}{3} + \frac{7}{3} = \frac{8}{3}$$

3. Cambio de orientación

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

Ejemplo:

$$\int_2^0 x\,dx = -\int_0^2 x\,dx = -\left(\frac{x^2}{2}\Big|_0^2\right) = -2$$

4. Integral sobre un intervalo nulo

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

Ejemplo:

$$\int_3^3 \cos x\,dx = 0$$

5. Comparación de funciones

Si $f(x) \leq g(x)$ en $[a, b]$, entonces:

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$$

Ejemplo: Si $f(x) = x$, $g(x) = x + 1$, entonces en $[0,1]$:

$$\int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2} \leq \int_0^1 (x+1)\,dx = \frac{3}{2}$$

6. Valor absoluto

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$

Ejemplo:

$$\int_{-1}^{1} x\ dx = 0, \quad \int_{-1}^{1} |\,x|\, dx = 1 \Rightarrow |0| \leq 1$$

7. Función constante

$$\int_{a}^{b} c\ dx = c(b - a)$$

Ejemplo:

$$\int_{2}^{5} 4\ dx = 4(5 - 2) = 12$$

2.11.6. Técnicas de Integración

Existen diversas técnicas que permiten resolver integrales que no se pueden calcular directamente con las reglas básicas. Las técnicas más usadas son las siguientes:

- Integración por partes
- Cambio de variable
- Fracciones parciales
- Sustitución trigonométrica

1. Integración por partes: deducción de la fórmula

La fórmula de integración por partes se deduce a partir de la regla del producto de derivación:

$$\frac{d}{dx}(u(x)v(x)) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

Si integramos ambos lados:

$$\int u'(x)v(x)\, dx + \int u(x)v'(x)\, dx = \int \frac{d}{dx}(u(x)v(x))\, dx$$

Reordenando los términos para despejar una de las integrales:

Pasamos el primer término al otro lado:

$$\int u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,dx$$

Esta es la forma más común de la **fórmula de integración por partes**, que también se escribe de manera abreviada como:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

Técnica LIATE para elegir u y dv

Para aplicar correctamente la integración por partes, se recomienda usar la regla nemotécnica **LIATE** para elegir la función u. El orden de prioridad es:

- **L**: Logarítmica ($\ln x$, $\log x$)
- **I**: Inversa trigonométrica ($\arctan x$, $\arcsin x$)
- **A**: Algebraica (polinomios como x, x^2, etc.)
- **T**: Trigonométrica ($\sin x$, $\cos x$, etc.)
- **E**: Exponencial (e^x, a^x)

Ejemplo 1: Resolver $\int xe^x\,dx$ Aplicamos integración por partes con:

$$\begin{gathered} u = x \quad dv = e^x\,dx \\ du = dx \quad v = e^x \end{gathered}$$

Entonces:

$$\int xe^x\,dx = xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x + C$$

Resultado: $\int xe^x\,dx = e^x(x-1) + C$

Ejemplo 2: Resolver $\int \ln x\,dx$

Aplicamos integración por partes con:

$$\begin{gathered} u = \ln x \quad dv = dx \\ du = \frac{1}{x}dx \quad v = x \end{gathered}$$

Entonces:

$$\int \ln x \, dx = x\ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} \, dx = x\ln x - \int 1 \, dx = x\ln x - x + C$$

Resultado: $\int \ln x \, dx = x\ln x - x + C$

Ejemplo 3: Resolver $\int x\cos x \, dx$ Aplicamos integración por partes con:

$$u = x \quad dv = \cos x \, dx$$
$$du = dx \quad v = \sin x$$

Entonces:

$$\int x\cos x \, dx = x\sin x - \int \sin x \, dx = x\sin x + \cos x + C$$

Resultado: $\int x\cos x \, dx = x\sin x + \cos x + C$

2. Sustitución: técnica del cambio de variable

La técnica de sustitución es una herramienta poderosa que permite simplificar una integral transformando la variable de integración. Esta técnica se basa en la regla de la cadena para derivadas y se expresa como:

$$\int f(g(x))g'(x) \, dx = \int f(u) \, du, \quad \text{donde } u = g(x)$$

Esta técnica es especialmente útil cuando la derivada de una función compuesta está presente dentro de la integral.

Ejemplo 1: Resolver $\int 2x\cos(x^2) \, dx$

Sustitución: Sea $u = x^2 \Rightarrow du = 2x \, dx$

Entonces:

$$\int 2x\cos(x^2) \, dx = \int \cos(u) \, du = \sin(u) + C = \sin(x^2) + C$$

Ejemplo 2: Resolver $\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \, dx$

Sustitución: Sea $u = 1 + x^2 \Rightarrow du = 2x \, dx \Rightarrow \frac{1}{2} du = x \, dx$

Entonces:

$$\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \, dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{u}} \, du = \frac{1}{2} \cdot 2u^{1/2} + C = \sqrt{1+x^2} + C$$

Ejemplo 3: Resolver $\int \frac{1}{x\ln x} \, dx$

Sustitución: Sea $u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x}\,dx$

Entonces:

$$\int \frac{1}{x\ln x}\,dx = \int \frac{1}{u}\,du = \ln|u| + C = \ln|\ln x| + C$$

3. Integración de funciones racionales mediante fracciones parciales

Esta técnica se aplica a integrales de funciones racionales, es decir, cocientes de polinomios. El objetivo es descomponer la función racional en una suma de fracciones más simples que puedan integrarse fácilmente. Es especialmente útil cuando el grado del numerador es menor que el del denominador.

Ejemplo 1: $\int \frac{1}{x^2-1}\,dx$

Factorizamos el denominador:

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{(x-1)(x+1)}$$

Descomponemos en fracciones parciales:

$$\frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$$

Multiplicamos por el común denominador y resolvemos:

$$1 = A(x+1) + B(x-1)$$

Sustituyendo valores convenientes:

Si $x = 1$: $1 = A(2) \Rightarrow A = \frac{1}{2}$

Si $x = -1$: $1 = B(-2) \Rightarrow B = -\frac{1}{2}$

Entonces:

$$\int \frac{1}{x^2-1}\,dx = \int \left(\frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{2(x+1)}\right) dx$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|x+1| + C$$

Ejemplo 2: $\int \frac{x+2}{x^2+3x+2}\,dx$

Factorizamos el denominador:

$$\frac{x+2}{x^2+3x+2}=\frac{x+2}{(x+1)(x+2)}$$

Descomponemos:

$$\frac{x+2}{(x+1)(x+2)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+2}$$

Multiplicamos:

$$x+2=A(x+2)+B(x+1)$$

Sustituyendo valores:

Si $x=-2$: $-2+2=A(0)+B(-1)\Rightarrow B=0$

Si $x=-1$: $-1+2=A(1)+B(0)\Rightarrow A=1$

Entonces:

$$\int\frac{x+2}{(x+1)(x+2)}\,dx=\int\frac{1}{x+1}dx=\ln|x+1|+C$$

Ejemplo 3: $\int\frac{5x^2+3}{(x+1)(x+2)}\,dx$

Como el grado del numerador es mayor o igual al del denominador, realizamos división:

$$\frac{5x^2+3}{(x+1)(x+2)}=\frac{5x^2+3}{x^2+3x+2}$$

Dividimos:

$$\frac{5x^2+0x+3}{x^2+3x+2}$$

El cociente es:

$$5+\frac{-15x-7}{(x+1)(x+2)}$$

Descomponemos:

$$\frac{-15x-7}{(x+1)(x+2)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+2}$$

Multiplicamos ambos lados por $(x+1)(x+2)$:

$$-15x-7=A(x+2)+B(x+1)$$

Expandimos:

$$-15x-7=Ax+2A+Bx+B=(A+B)x+(2A+B)$$

Igualamos coeficientes:

$$\begin{aligned} A+B&=-15\\ 2A+B&=-7 \end{aligned}$$

Restando ecuaciones:

$$(2A+B)-(A+B)=-7-(-15)\Rightarrow A=8$$

$$8+B=-15\Rightarrow B=-23$$

Sustituimos en la integral

$$\int\frac{5x^2+3}{(x+1)(x+2)}dx=\int\left(5+\frac{8}{x+1}-\frac{23}{x+2}\right)dx$$

Resolver

$$5x+8\ln|x+1|-23\ln|x+2|+C$$

Resultado final:

$$\int\frac{5x^2+3}{(x+1)(x+2)}dx=5x+8\ln|x+1|-23\ln|x+2|+C$$

Ejemplo 3:

Resolver:

$$\int\frac{2x+1}{x^2-x-2}\,dx$$

Factorizamos el denominador:

$$x^2-x-2=(x-2)(x+1)$$

Descomponemos:

$$\frac{2x+1}{(x-2)(x+1)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1}$$

Multiplicamos por el denominador común:

$$2x+1 = A(x+1) + B(x-2)$$

Expandimos:

$$2x+1 = Ax + A + Bx - 2B = (A+B)x + (A-2B)$$

Igualamos coeficientes:

$$\begin{gathered} A+B=2 \\ A-2B=1 \end{gathered}$$

Resolviendo el sistema: De (1): $A = 2 - B$ Sustituimos en (2):

$$2 - B - 2B = 1 \Rightarrow 2 - 3B = 1 \Rightarrow B = \frac{1}{3}, \quad A = 2 - \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$$

Sustituimos en la integral:

$$\int \left(\frac{5/3}{x-2} + \frac{1/3}{x+1}\right) dx = \frac{5}{3}\ln|x-2| + \frac{1}{3}\ln|x+1| + C$$

Resultado final:

$$\int \frac{2x+1}{x^2-x-2} dx = \frac{5}{3}\ln|x-2| + \frac{1}{3}\ln|x+1| + C$$

4. Sustitución trigonométrica

La sustitución trigonométrica es útil para resolver integrales que contienen expresiones con raíces cuadradas de binomios cuadráticos. Se utilizan identidades trigonométricas para transformar estas expresiones en formas que puedan integrarse con mayor facilidad.

Hay tres tipos básicos de sustituciones:

- $\sqrt{a^2 - x^2} \Rightarrow x = a\sin\theta$
- $\sqrt{a^2 + x^2} \Rightarrow x = a\tan\theta$
- $\sqrt{x^2 - a^2} \Rightarrow x = a\sec\theta$

Ejemplo 1: Resolver $\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$

Sustitución: $x = 2\sin\theta \Rightarrow dx = 2\cos\theta d\theta$

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx &= \int \frac{1}{\sqrt{4-4\sin^2\theta}} \cdot 2\cos\theta d\theta\\ &= \int \frac{1}{\sqrt{4(1-\sin^2\theta)}} \cdot 2\cos\theta d\theta\\ &= \int \frac{1}{\sqrt{4\cos^2\theta}} \cdot 2\cos\theta d\theta\\ &= \int \frac{1}{2\cos\theta} \cdot 2\cos\theta d\theta = \int 1 d\theta = \theta + C\end{aligned}$$

Volviendo a x:

$$\theta = \arcsin\left(\frac{x}{2}\right) \Rightarrow \int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx = \arcsin\left(\frac{x}{2}\right) + C$$

Ejemplo 2: Resolver $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+9}}\,dx$

Sustitución: $x = 3\tan\theta \Rightarrow dx = 3\sec^2\theta d\theta$

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{x^2+9}}dx &= \int \frac{1}{\sqrt{9\tan^2\theta+9}} \cdot 3\sec^2\theta d\theta\\ &= \int \frac{1}{\sqrt{9(\tan^2\theta+1)}} \cdot 3\sec^2\theta d\theta\\ &= \int \frac{1}{\sqrt{9\sec^2\theta}} \cdot 3\sec^2\theta d\theta\\ &= \int \frac{1}{3\sec\theta} \cdot 3\sec^2\theta d\theta = \int \sec\theta d\theta\end{aligned}$$

$$\int \sec\theta d\theta = \ln|\sec\theta + \tan\theta| + C$$

Volviendo a x:

$$\sec\theta = \sqrt{1+\tan^2\theta} = \sqrt{1+\left(\frac{x}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{x^2+9}}{3}, \quad \tan\theta = \frac{x}{3}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+9}}dx = \ln\left|\frac{\sqrt{x^2+9}+x}{3}\right| + C$$

Ejemplo 3: Resolver $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}dx$

Sustitución: $x = \sec\theta \Rightarrow dx = \sec\theta\tan\theta d\theta$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}dx = \int \frac{1}{\sec\theta \cdot \sqrt{\sec^2\theta - 1}} \cdot \sec\theta\tan\theta d\theta$$
$$= \int \frac{1}{\sec\theta \cdot \tan\theta} \cdot \sec\theta\tan\theta d\theta = \int 1 d\theta = \theta + C$$

Volviendo a x:

$$\theta = \text{arcsec}(x) \Rightarrow \int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}dx = \text{arcsec}(x) + C$$

Comparativa de Técnicas de Integración

A continuación, se presenta una tabla que resume las principales técnicas de integración vistas en esta sección. Esta tabla resulta útil como herramienta de consulta rápida para identificar el método más adecuado según el tipo de función que se desea integrar.

Tabla 4.

Comparativa de Técnicas de Integración

Técnica	Cuando se utiliza	Forma típica	Ejemplo clásico
Integración por partes	Producto de funciones (una fácil de derivar, otra fácil de integrar)	$\int u\,dv = uv - \int v\,du$	$\int xe^x\,dx$
Sustitución (cambio de variable)	Función compuesta con derivada reconocible	$u = g(x) \Rightarrow \int f(g(x))g'(x)\,dx$	$\int x\cos(x^2)\,dx$
Fracciones parciales	Cociente de polinomios racionales con grado del numerador < grado del denominador	$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x-a} + \cdots$	$\int \frac{3x+1}{x^2+x}dx$
Sustitución trigonométrica	Presencia de raíces cuadradas con expresiones cuadráticas	$x = \sin\theta, \sec\theta, \tan\theta$	$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$

Nota: Autores (2026).

Esta tabla no solo resume los métodos, sino que también ofrece una referencia visual clara para elegir la técnica adecuada en problemas de integración más complejos.

2.11.7. Aplicaciones de la Integral

En esta sección se exploran usos prácticos del cálculo integral más allá del mero procedimiento matemático. Las aplicaciones permiten comprender cómo la integral se convierte en una herramienta poderosa para modelar fenómenos físicos, geométricos y económicos. A través de ejemplos, se analiza cómo el área bajo una curva puede traducirse en magnitudes como volumen, longitud, trabajo y más.

1. Cálculo de áreas bajo y entre curvas

La aplicación más directa de la integral definida es el cálculo de áreas. Cuando se desea determinar el área encerrada entre una función continua y el eje x, o entre dos curvas, se puede utilizar el valor de la integral definida. Se consideran dos funciones, digamos f(x) y g(x), y se calcula el área encerrada entre ambas.

Ejemplo práctico - Calculo bajo la curva y eje de las x:

Una empresa desea calcular el área bajo la curva de ingreso marginal $f(x) = 5x - x^2$ en el intervalo $[0,4]$, para conocer el ingreso total acumulado por la venta de unidades:

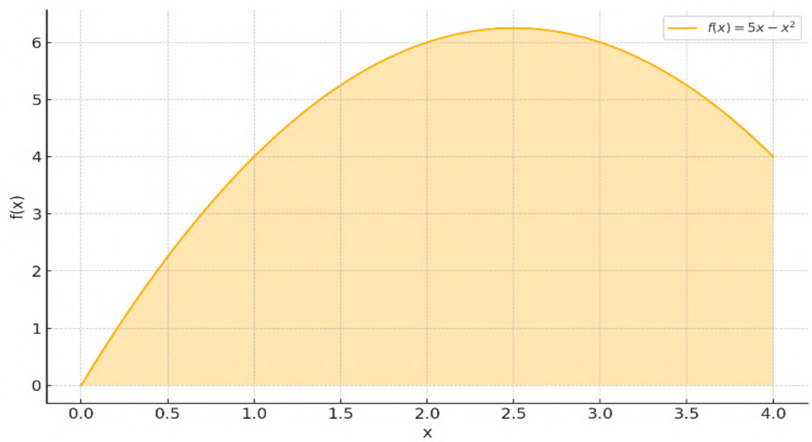
$$\int_0^4 (5x - x^2)\, dx$$

Solución:

$$\int_0^4 (5x - x^2)\, dx = \left[\frac{5x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^4 = \left(\frac{80}{2} - \frac{64}{3}\right) = 40 - \frac{64}{3} = \frac{56}{3}$$

Figura 35.

Área bajo la curva y eje de las x



Nota: Autores (2026).

Este valor representa el ingreso total acumulado en el rango dado.

Ejemplo práctico - Cálculo de Área entre Curvas

Una empresa comercializa dos productos. El ingreso generado por el producto A viene dado por $f(x) = 50 - 2x$, mientras que el ingreso del producto B viene dado por $g(x) = 30 + x$, donde x representa el tiempo en años. Calcular la diferencia acumulada de ingresos entre ambos productos en el intervalo $[0,5]$.

Solución: Para encontrar la diferencia acumulada de ingresos, debemos calcular el área entre las curvas $f(x)$ y $g(x)$ en el intervalo dado:

$$\text{Área} = \int_0^5 [f(x) - g(x)]\, dx = \int_0^5 [(50 - 2x) - (30 + x)]\, dx$$

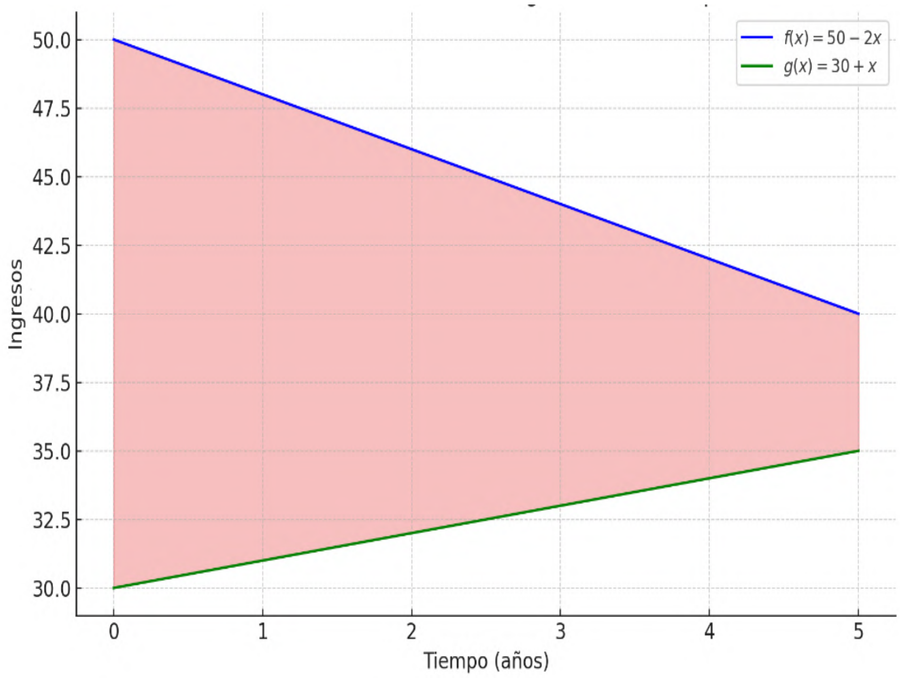
Simplificamos la expresión dentro del integrando:

$$\int_0^5 (20 - 3x)\, dx = \left[20x - \frac{3x^2}{2}\right]_0^5 = 20(5) - \frac{3(5)^2}{2} = 100 - \frac{75}{2} = \frac{125}{2} = 62.5$$

Por lo tanto, la diferencia acumulada de ingresos entre los productos A y B en los primeros 5 años es de $\boxed{62.5}$ unidades monetarias.

Figura 36

Área entre las curvas f(x)=50-2x y g(x)=30+x en el intervalo [0,5].



Nota: Autores (2026).

La figura ilustra los ingresos anuales proyectados de dos productos, A y B, durante los primeros cinco años de venta. La curva azul representa el ingreso del producto A, que comienza en 50,000 USD y disminuye en el tiempo, lo que puede indicar una reducción en la demanda o en la participación de mercado. Por otro lado, la curva roja representa el ingreso del producto B, que parte de 30,000 USD y aumenta cada año, lo que podría reflejar un producto en crecimiento o con mejor aceptación. Esta dinámica refleja un escenario común en el ciclo de vida de productos: mientras uno madura y pierde relevancia, el otro gana tracción. En términos prácticos, esto indica que, a pesar de que los ingresos del Producto A disminuyen, sigue acumulando una ventaja total de $62,500 sobre el Producto B a lo largo de esos cinco años. Esta técnica permite evaluar de manera visual y cuantitativa el desempeño relativo de dos opciones comerciales, facilitando decisiones estratégicas basadas en ingresos acumulados.

2. Cálculo de volúmenes de sólidos de revolución

Otra aplicación importante es el cálculo de volúmenes de cuerpos generados por la rotación de una curva alrededor de un eje. Los sólidos de revolución son figuras tridimensionales generadas al rotar una región del plano alrededor de un eje. Esta técnica tiene múltiples aplicaciones prácticas en física, ingeniería y diseño industrial. El eje alrededor del cual se realiza la rotación se denomina **eje de revolución**.

Cuando una curva definida por una función continua $f(x)$ se rota alrededor del eje x, se genera un sólido de revolución cuya forma puede aproximarse como una suma de discos delgados. Cada disco tiene radio $R = f(x)$ y grosor dx. El volumen de un disco diferencial es:

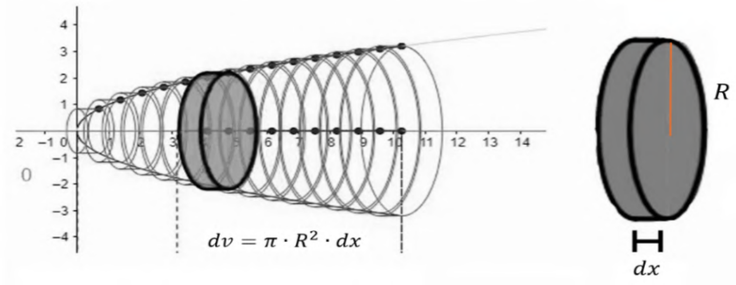
$$dV = \pi R^2 dx$$

Integrando en un intervalo $[a, b]$, obtenemos la fórmula general para el cálculo del volumen:

$$V = \int_a^b \pi\,[f(x)]^2 dx$$

Figura 37.

Volúmenes de sólidos de revolución



Nota: Autores (2026).

Ejemplo práctico:

Se desea conocer el volumen de una copa cilíndrica generada al rotar la curva $f(x) = x^2$ y $y = 0$ en el intervalo $[0,2]$ respecto al eje x.

Solución:

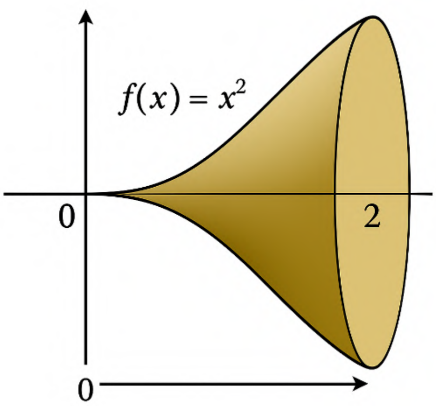
Aplicamos la fórmula del método de los discos:

$$V = \pi \int_0^2 (x^2)^2 dx = \pi \int_0^2 x^4\, dx = \pi \left[\frac{x^5}{5}\right]_0^2 = \pi \cdot \frac{32}{5} = \frac{32\pi}{5}$$

Este resultado representa el volumen exacto del sólido generado por la rotación de la parábola $f(x) = x^2$ en el intervalo dado.

Figura 38.

Generación de un sólido de revolución al rotar f(x)



Nota: Autores (2026).

Ejemplo: Volumen de revolución alrededor del eje y)

Hallar el volumen del sólido generado al rotar la región delimitada por:

$$y = 2 - \frac{x^2}{2}, \quad y = 0, \quad x \in [0,2]$$

alrededor del eje y, usando el método de discos.

Paso 1: Despejar x en función de y

$$y = 2 - \frac{x^2}{2} \quad \Rightarrow \quad x^2 = 2(2 - y) \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{4 - 2y}$$

Paso 2: Aplicar la fórmula del volumen por discos

Cuando rotamos respecto al eje y y tenemos $x = f(y)$, usamos:

$$V = \int_a^b \pi\, [x(y)]^2\, dy$$

Sustituimos:

$$V = \int_0^2 \pi \left(\sqrt{4 - 2y}\right)^2 dy = \int_0^2 \pi\, (4 - 2y)\, dy$$

Paso 3: Resolver la integral

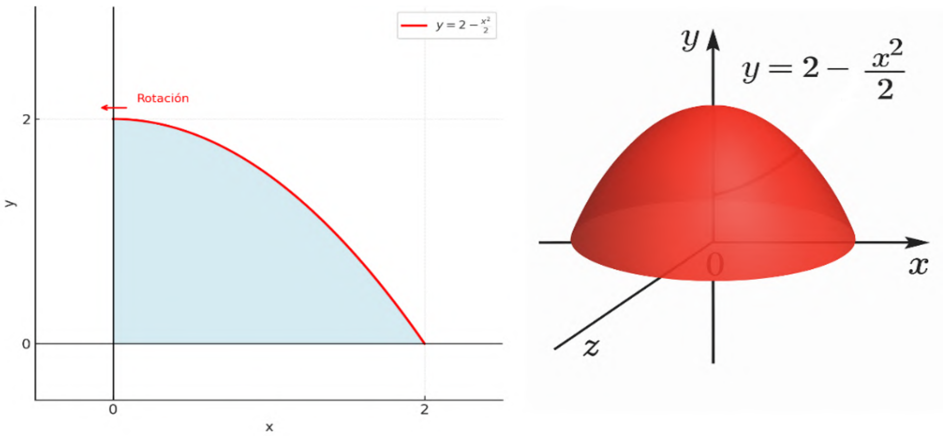
$$V = \pi \int_0^2 (4 - 2y)\, dy = \pi[4y - y^2]_0^2 = \pi(8 - 4) = 4\pi$$

Resultado Final

$$\boxed{V = 4\pi \text{ unidades cúbicas}}$$

Figura 39.

Generación de un sólido de revolución al rotar alrededor del eje y



Nota: Autores (2026).

Este resultado se puede calcular mediante un cambio de variable o aproximación numérica. El resultado representa el volumen del sólido generado por la rotación de dicha región respecto al eje y.

Método de las cáscaras cilíndricas

Cuando se desea calcular el volumen de un sólido de revolución y el eje de rotación es **paralelo** al eje sobre el cual está expresada la función, el **método de las cáscaras cilíndricas** puede resultar más adecuado y directo que el método de discos.

Por ejemplo, si la función está dada como $y = f(x)$ y el eje de rotación es el eje *y*, usar cáscaras cilíndricas evita tener que despejar x en términos de y.

¿Cómo funciona el método? Se imagina la región siendo dividida en delgadas *cáscaras* cilíndricas verticales. Cada cáscara tiene:

- **Radio**: la distancia desde el eje de rotación hasta la cáscara, normalmente x,
- **Altura**: el valor de la función $f(x)$,
- **Espesor**: un incremento infinitesimal en x, es decir, dx.

El volumen de cada cáscara se aproxima por:

$$dV = 2\pi \cdot \text{radio} \cdot \text{altura} \cdot \text{espesor} = 2\pi x f(x)\, dx$$

Integrando de a a b, se obtiene la fórmula general:

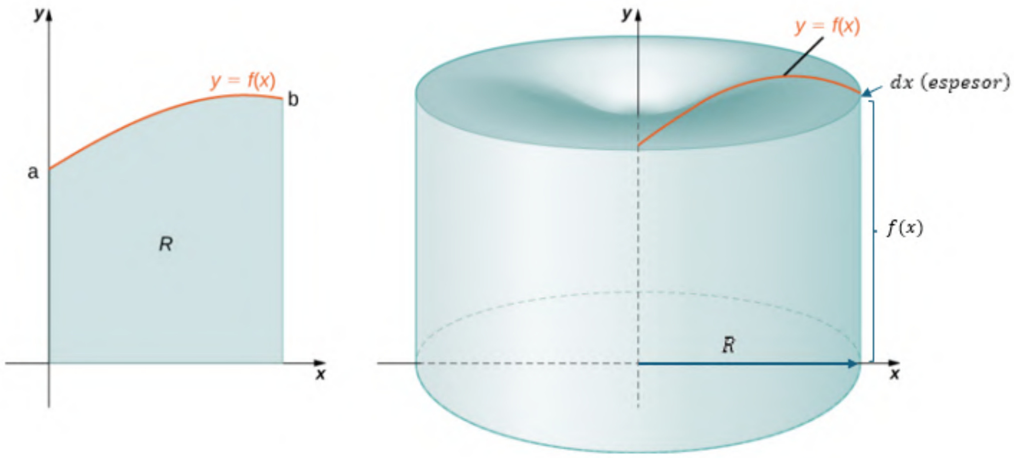
$$V = \int_a^b 2\,\pi x f(x)\, dx$$

¿Cuándo usar cáscaras cilíndricas?

- Cuando rotamos alrededor del eje *y* y la función está en términos de x,
- Cuando es difícil despejar la función para usar el método de discos,
- Cuando la región está entre dos curvas y el eje de rotación no toca directamente la región.

Figura 40.

Cascaras cilíndricas



Nota: Autores (2026).

Método de las Arandelas

Cuando se desea calcular el volumen de un sólido de revolución generado al girar una región alrededor de un eje, y **existe un hueco interior** (es decir, la región no está en contacto directo con el eje de rotación), se puede aplicar el **método de las arandelas**. Este método generaliza el método de discos para el caso en que se debe restar el volumen interior de otro sólido.

¿Cómo funciona el método?

La región que se gira se encuentra entre dos curvas, una exterior $f(x)$ y una interior $g(x)$, con $f(x) \geq g(x) \geq 0$, en el intervalo $[a, b]$. Cuando se rota esta región respecto al eje x, se forma un **sólido con un hueco**, como una arandela.

Cada arandela (o disco con agujero) tiene:

- **Radio exterior:** $R = f(x)$
- **Radio interior:** $r = g(x)$
- **Espesor:** un incremento infinitesimal en x, es decir, dx

Entonces, el volumen de una arandela se calcula como:

$$dV = \pi(R^2 - r^2)\, dx$$

Fórmula general del volumen usando arandelas

$$V = \int_a^b \pi\,[f(x)^2 - g(x)^2]dx$$

Si la rotación se realiza respecto al eje y, y las funciones están en términos de y, la fórmula se ajusta como:

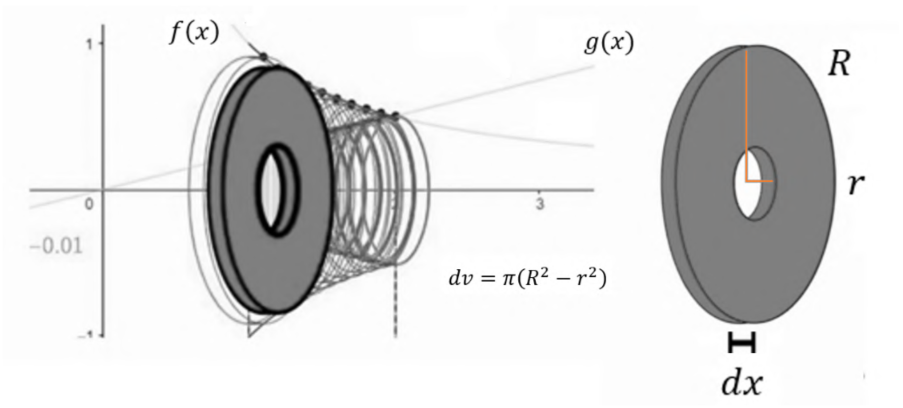
$$V = \int_c^d \pi\,[f(y)^2 - g(y)^2]dy$$

¿Cuándo usar el método de las arandelas?

- Cuando la región a rotar **no está pegada al eje de rotación**, es decir, hay un hueco.
- Cuando se gira una región **entre dos funciones**, y se desea obtener el volumen del sólido **con un espacio vacío**.
- Cuando se requiere un enfoque directo y visual, especialmente útil en contextos de diseño de estructuras huecas, recipientes o túneles.

Figura 41

Volumen de un sólido mediante el método de las arandelas



Nota: Autores (2026).

3. Trabajo realizado por una fuerza variable

El trabajo realizado por una fuerza que varía con la posición no puede calcularse mediante la fórmula clásica $W = F \cdot d$, válida solo para fuerzas constantes. En su lugar, cuando la fuerza depende de la posición x, el trabajo se obtiene integrando la fuerza a lo largo del desplazamiento:

$$W = \int_a^b F\,(x)\,dx$$

Interpretación física: La integral representa la suma del trabajo infinitesimal realizado en cada punto a lo largo del trayecto. Es especialmente útil en contextos donde la fuerza *aumenta o disminuye* según el desplazamiento, como en resortes, campos gravitatorios o electromagnéticos, entre otros.

Ejemplo práctico (Ley de Hooke): Un resorte obedece la Ley de Hooke, es decir, la fuerza requerida para estirarlo es proporcional a su alargamiento. Se requiere una fuerza proporcional al desplazamiento: $F(x) = kx$, con $k = 10$ N/m. Calcular el trabajo necesario para estirar el resorte desde $x = 0$ hasta $x = 0.2$ m.

$$F(x) = kx$$

donde:

- $k = 10$ N/m es la constante elástica del resorte,
- x es la elongación desde la posición de equilibrio.

Calcular el trabajo necesario para estirar el resorte desde $x = 0$ hasta $x = 0.2$ m.

Solución:

$$W = \int_0^{0.2} 10\,x\,dx = 10\int_0^{0.2} x\ dx = 10\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{0.2} = 10\cdot\frac{(0.2)^2}{2} = 10\cdot\frac{0.04}{2} = 0.2\ \text{J}$$

Interpretación: El resultado nos indica que **0.2 Joules de energía** son necesarios para estirar el resorte hasta 20 cm. Esta energía queda almacenada como *energía potencial elástica*, y puede recuperarse si el resorte se libera.

CAPITULO 03

Ecuaciones Diferenciales

Ecuaciones Diferenciales

Introducción general

Las ecuaciones diferenciales constituyen una herramienta fundamental para describir fenómenos que evolucionan en el tiempo o en el espacio. A diferencia de las ecuaciones algebraicas, que establecen relaciones estáticas entre cantidades, las ecuaciones diferenciales permiten representar **dinámicas de cambio**. Se utilizan para modelar sistemas en los que una magnitud desconocida está relacionada con una o más de sus tasas de variación.

Este tipo de ecuaciones aparece de manera natural en casi todas las disciplinas científicas y tecnológicas: en física para describir el movimiento de partículas, en biología para estudiar la evolución de poblaciones, en economía para analizar tasas de crecimiento, y en ingeniería para modelar sistemas eléctricos, mecánicos o térmicos.

A lo largo de esta unidad, se introducirán los conceptos fundamentales de las ecuaciones diferenciales, sus principales tipos, métodos de solución básicos, así como su aplicación en la resolución de problemas reales. Se enfatizará en las **ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO)**, que son aquellas en las que la función incógnita depende de una sola variable independiente.

3.1. ¿Qué es una ecuación diferencial?

Una **ecuación diferencial** es una ecuación que involucra una función desconocida y una o más de sus derivadas. Es decir, expresa una relación entre una magnitud y la forma en que esta cambia.

Desde una perspectiva formal, una ecuación diferencial ordinaria (EDO) puede escribirse como:

$$F\left(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}\right) = 0$$

Donde:

- x es la variable independiente,
- $y = y(x)$ es la función incógnita,
- $y', y'', \dots, y^{(n)}$ son las derivadas de y respecto de x,
- n es el **orden** de la ecuación, es decir, la derivada de mayor grado que aparece.

3.1.1. Ejemplos de ecuaciones diferenciales ordinarias:

1) Ecuación de primer orden:

$$\frac{dy}{dx} = ky$$

Modela procesos de crecimiento o decaimiento exponencial (como poblaciones o sustancias radiactivas).

2) Ecuación de segundo orden:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \omega^2 y = 0$$

Representa oscilaciones, como en un sistema masa-resorte sin fricción.

3) Ecuación no lineal:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y = x$$

Interpretación práctica

Resolver una ecuación diferencial significa encontrar una o varias funciones $y(x)$ que, al ser derivadas y reemplazadas en la ecuación dada, la satisfagan en todos los puntos del dominio.

Por ejemplo, consideremos la ecuación diferencial de primer orden:

$$\frac{dy}{dx} = ky$$

Esta ecuación nos indica que la tasa de cambio de y con respecto a x es proporcional al valor actual de y. Es decir, cuanto mayor sea y, más rápidamente crece (o decrece, si $k < 0$).

Buscamos una función $y(x)$ tal que su derivada sea igual a ky. Una función que cumple con esta propiedad es:

$$y(x) = Ce^{kx}$$

donde C es una constante arbitraria.

Verificación: derivamos $y(x) = Ce^{kx}$:

$$\frac{dy}{dx} = Cke^{kx} = k(Ce^{kx}) = ky(x)$$

Por lo tanto, $y(x) = Ce^{kx}$ es una solución válida de la ecuación diferencial dada.

Este tipo de procedimiento, donde se propone una forma funcional y se verifica que cumple la ecuación, es una forma común de resolver ecuaciones diferenciales sencillas.

3.2. Clasificación de las ecuaciones diferenciales

Una ecuación diferencial puede clasificarse según distintos criterios. Esta clasificación permite identificar la naturaleza de la ecuación, anticipar el comportamiento de sus soluciones y seleccionar métodos adecuados para resolverla. La clasificación más común se expone a continuación:

3.2.1. Según el orden

El orden de una ecuación diferencial se refiere a la derivada de mayor orden que aparece en ella. Muchas técnicas de resolución y el tipo de soluciones dependen directamente de este.

La forma general es:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

Si la ecuación se puede despejar respecto a la derivada de orden más alto, se obtiene la forma normal:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

Formas normales comunes y ejemplos:

- Primer orden:

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y), \quad \text{por ejemplo:} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x-y}{x+y}$$

- Segundo orden:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(x,y,y'), \quad \text{por ejemplo:} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\omega^2 y$$

3.2.2. Según la linealidad

Una ecuación diferencial es **lineal** si:

- Las funciones y derivadas aparecen en primer grado,
- No hay productos entre derivadas,
- No están dentro de funciones no lineales (como $\sin(y)$, e^y, etc.),
- Los coeficientes dependen sólo de la variable independiente.

Forma general:

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x)$$

Ejemplos no lineales:

$$y \cdot \frac{dy}{dx} + y = \ln(x)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + e^y = x$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} + y^3 = 0$$

Ejemplo lineal:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5\frac{dy}{dx} - 6y = \cos(x)$$

3.2.3. Según la homogeneidad

En el caso de ecuaciones diferenciales lineales, una ecuación se clasifica como:

- **Homogénea:** si todos los términos de la ecuación contienen a la función incógnita y o a alguna de sus derivadas, y el lado derecho (también llamado segundo miembro) de la ecuación es igual a cero.

Por ejemplo, la ecuación:

$$\frac{dy}{dx} + 3y = 0$$

es homogénea porque todos los términos del lado izquierdo involucran a y o su derivada, y el lado derecho es exactamente cero.

No homogénea: si en el lado derecho aparece un término que no depende de y ni de sus derivadas, es decir, un término independiente.

Por ejemplo, la ecuación:

$$\frac{dy}{dx} + 3y = e^{x}$$

es no homogénea porque el lado derecho contiene un término independiente e^{x}, que no está relacionado con la función incógnita.

Importancia: Esta distinción es relevante porque la solución general de una ecuación lineal no homogénea se obtiene sumando:

- La solución general de la ecuación homogénea asociada, y
- Una solución particular de la ecuación no homogénea.

3.2.4. Clasificación por tipo: EDO vs EDP

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO):

Involucran derivadas ordinarias respecto a una sola variable independiente. Ejemplos:

$$\frac{dz}{dx} + 4z = \ln(x), \quad \frac{d^2z}{dx^2} + z = 0, \quad \frac{dx}{dt} + 2x - \frac{dy}{dt} = 0$$

Notación prima:

$$z' + 4z = \ln(x), \quad z'' + z = 0, \quad x' - y' + 2x = 0$$

Ecuaciones en Derivadas Parciales (EDP):

Involucran derivadas parciales respecto a dos o más variables independientes. Ejemplos:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0$$

Notación por subíndices:

$$T_{xx} + T_{yy} = 0, \quad u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \quad v_x + w_y = 0$$

3.2.5. Otras clasificaciones útiles

Además del orden, la linealidad y el tipo de derivadas, existen otras características importantes que permiten clasificar las ecuaciones diferenciales de manera más precisa. Estas clasificaciones son útiles para identificar propiedades del sistema que se modela y para elegir estrategias de solución apropiadas.

- **Autónoma:** una ecuación es autónoma si la variable independiente (por ejemplo, x) no aparece de manera explícita en la ecuación. Sólo interviene la función incógnita y y sus derivadas.

$$\frac{dy}{dx} = y^2$$

En este caso, x no aparece en el lado derecho. Las ecuaciones autónomas suelen tener soluciones cuya forma depende únicamente de las condiciones iniciales.

- **No autónoma:** si la variable independiente sí aparece explícitamente en la ecuación, entonces se clasifica como no autónoma.

$$\frac{dy}{dx} = xy$$

Aquí, x aparece en el segundo miembro, lo que puede introducir una dependencia más compleja del comportamiento del sistema respecto al tiempo o espacio.

- **Con coeficientes constantes:** si los coeficientes que acompañan a y y sus derivadas son números fijos (es decir, no dependen de x), se dice que la ecuación tiene coeficientes constantes.

$$y'' + 3y' + 2y = 0$$

Estas ecuaciones suelen ser más sencillas de resolver y admiten soluciones analíticas mediante métodos algebraicos.

- **Con coeficientes variables:** cuando los coeficientes dependen de la variable independiente, se clasifican como ecuaciones con coeficientes variables.

$$x^2y'' - xy' + y = 0$$

Este tipo de ecuaciones es más común en problemas físicos donde las propiedades del sistema cambian con el tiempo o el espacio.

- **Explícita:** si la derivada de la función está despejada, se dice que la ecuación es explícita.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y}$$

Estas ecuaciones permiten aplicar directamente métodos de integración o separación de variables.

- **Implícita:** si la derivada aparece en una expresión que no está despejada, la ecuación es implícita.

$$y\frac{dy}{dx} + x^2 = 0$$

En estos casos, puede ser necesario manipular algebraicamente la ecuación para obtener la derivada de forma explícita o aplicar métodos específicos.

3.3. Tipos de soluciones de una ecuación diferencial

Resolver una ecuación diferencial significa encontrar una o más funciones que satisfacen la relación planteada entre una función desconocida y sus derivadas. Sin embargo, existen distintos tipos de soluciones según el contexto del problema y las condiciones impuestas.

3.3.1. Solución general

Es una **familia de funciones** que incluye todas las posibles soluciones de una ecuación diferencial. En una ecuación de orden n, la solución general contiene n constantes arbitrarias, que reflejan la libertad que ofrece la ecuación antes de imponer condiciones.

Por ejemplo, para la ecuación:

$$\frac{dy}{dx} = ky$$

la solución general es:

$$y(x) = Ce^{kx}$$

donde C es una constante arbitraria. Cada valor de C define una curva diferente dentro de la familia de soluciones.

3.3.2. Solución particular

Una **solución particular** se obtiene al imponer condiciones adicionales, como valores iniciales. Estas condiciones permiten determinar valores concretos de las constantes presentes en la solución general.

Siguiendo el ejemplo anterior, si se establece la condición $y(0) = 2$, se obtiene:

$$y(x) = 2e^{kx}$$

que corresponde a una única curva dentro de la familia general.

3.3.3. Solución singular

Una **solución singular** es una solución que no puede obtenerse a partir de la solución general mediante la elección de constantes. Generalmente, aparece en ecuaciones no lineales y representa un comportamiento especial del sistema.

Por ejemplo:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = y$$

tiene como solución general:

$$y(x) = \left(\frac{x + C}{2}\right)^2$$

pero también posee una solución singular:

$$y(x) = 0$$

que no se puede obtener con ningún valor de C.

3.3.4. Curvas solución e interpretación geométrica

Cada solución de una ecuación diferencial se puede representar como una **curva en el plano** que satisface la relación entre y y sus derivadas. Estas curvas, llamadas **curvas integrales**, permiten visualizar el comportamiento del sistema en función del parámetro o condiciones iniciales.

Cuando no se imponen condiciones, se obtiene una **familia de soluciones**. Al aplicar una condición inicial o de frontera, se selecciona una única curva: la **solución particular**.

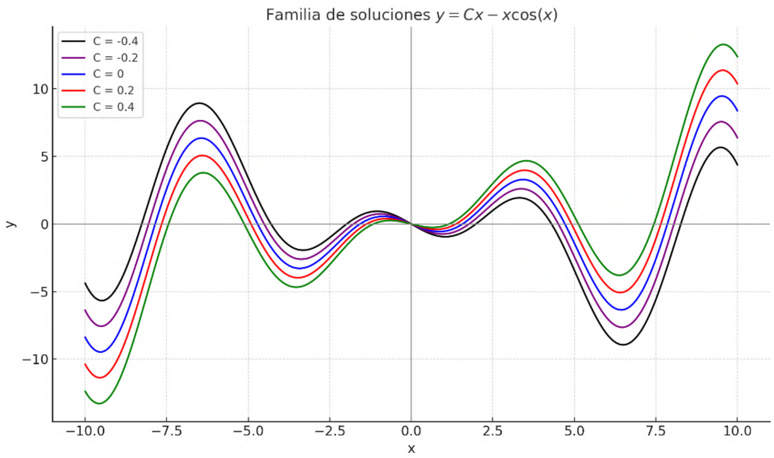
Ejemplo gráfico: Consideremos la ecuación:

$$y(x) = Cx - x\cos(x)$$

Esta expresión representa una familia de soluciones para diferentes valores del parámetro C. En la siguiente figura puede verse cómo cada curva corresponde a un valor distinto de C. Todas cumplen la misma ecuación diferencial, pero representan diferentess escenarios.

Figura 42.

Gráfica de curvas solución de una EDO



Nota: Autores (2026)

En el caso particular $C = 0$, se obtiene:

$$y(x) = -x\cos(x)$$

Este ejemplo muestra cómo una ecuación diferencial simple puede tener infinitas soluciones que dependen de un parámetro libre, y cómo una condición concreta determina una curva específica dentro de esa familia.

3.3.5. Transformación y derivación de una EDO: forma implícita y explícita

No todas las ecuaciones diferenciales se presentan directamente en su forma final. En muchas situaciones, especialmente en física o ingeniería, se parte de una relación funcional más compleja y, al aplicar derivadas, se obtiene la ecuación diferencial que modela el fenómeno.

Este proceso implica aplicar las reglas de derivación adecuadas (producto, cadena, etc.) y luego reorganizar la expresión para obtener, si es posible, una forma explícita para la derivada.

Ejemplo:

Dada la expresión:

$$f(x, y) = 3x^2y + \ln(y) \cdot x = 5$$

Aplicamos derivación con respecto a x, considerando que $y = y(x)$ es función de x:

$$\frac{d}{dx}(3x^2y) + \frac{d}{dx}(x\ln(y)) = \frac{d}{dx}(5)$$

Aplicando la regla del producto en ambos términos:

$$6xy + 3x^2\frac{dy}{dx} + \ln(y) + x \cdot \frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

Agrupando los términos con $\frac{dy}{dx}$:

$$\left(3x^2 + \frac{x}{y}\right)\frac{dy}{dx} + 6xy + \ln(y) = 0$$

Y despejando la derivada, se obtiene:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-6xy - \ln(y)}{3x^2 + \frac{x}{y}}$$

Este procedimiento permite transformar una igualdad funcional en una ecuación diferencial. Inicialmente, la derivada de la función incógnita puede aparecer embebida en una expresión más compleja: esta es la forma conocida como implícita. Luego, al aplicar álgebra y despejar, se puede obtener la forma explícita, donde la derivada está completamente aislada. La capacidad de pasar de una forma a otra es útil tanto para el análisis teórico como para la aplicación de métodos de resolución.

3.3.6. Diferencia entre función y solución: dominio y continuidad

Es importante distinguir entre una función cualquiera y una solución válida de una ecuación diferencial. No toda función que "parece encajar" es necesariamente una solución, ya que una **solución válida debe cumplir ciertos requisitos** en relación con la ecuación y su dominio.

Para que una función sea considerada solución de una ecuación diferencial, debe cumplir dos condiciones esenciales:

- Ser suficientemente diferenciable en un intervalo dado (es decir, debe tener las derivadas requeridas por la ecuación).

- Verificar la ecuación diferencial en todos los puntos de ese intervalo.

Ejemplo conceptual: Consideremos la ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$$

Una solución general es:

$$y(x) = \ln|x| + C$$

Esta función está bien definida y derivable en los intervalos $(-\infty, 0)$ y $(0, \infty)$, pero no en $x = 0$, donde la derivada no existe. Por tanto, cualquier solución de esta ecuación estará limitada a uno de esos intervalos.

Ahora, consideremos otra función definida por tramos:

$$f(x) = \begin{cases} \ln(x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Aunque esta función coincide con la solución general en parte del dominio, **no es solución** de la ecuación en todo $\mathbb{R}$ porque:

- No es derivable en $x = 0$,
- No satisface la ecuación diferencial en todo su dominio.

Este ejemplo muestra que una función definida a trozos o con discontinuidades puede parecer una solución, pero no cumple con las condiciones necesarias. Por tanto, una función es una solución válida de una ecuación diferencial solo si es derivable donde se requiere y satisface la ecuación en el intervalo considerado.

Ejemplos: Verificación de funciones como soluciones

A continuación, se presentan dos ejemplos en los que se comprueba si una función dada es realmente una solución de una ecuación diferencial. El objetivo es verificar que la función propuesta sea derivable en el intervalo considerado y que, al sustituirla en la ecuación, se satisfaga la igualdad.

Ejemplo 1. Verifique si la función $y = \frac{x^4}{16}$ es solución de la ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dx} = x\sqrt{y}$$

Solución: Derivamos la función propuesta:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\frac{x^4}{16}\right)=\frac{4x^3}{16}=\frac{x^3}{4}$$

Sustituimos $y=\frac{x^4}{16}$ en el lado derecho de la ecuación:

$$x\sqrt{y}=x\cdot\sqrt{\frac{x^4}{16}}=x\cdot\frac{x^2}{4}=\frac{x^3}{4}$$

Ambos lados coinciden, por tanto, $y=\frac{x^4}{16}$ **es solución** de la ecuación.

Ejemplo 2. Verifique si la función $y=e^{2x}$ es solución de la ecuación:

$$\frac{dy}{dx}-2y=0$$

Solución: Derivamos la función propuesta:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}(e^{2x})=2e^{2x}$$

Sustituimos en la ecuación:

$$2e^{2x}-2e^{2x}=0$$

La igualdad se cumple, por lo tanto, $y=e^{2x}$ **es una solución válida** de la ecuación diferencial.

3.4. Problemas con valores iniciales

En muchas aplicaciones prácticas no basta con conocer la ecuación diferencial que describe un fenómeno; también es necesario determinar una solución concreta que cumpla con ciertas condiciones impuestas por la situación inicial del problema. A este tipo de planteamiento se lo conoce como un **problema con valores iniciales** (o PVI).

Un problema con valores iniciales consiste en una ecuación diferencial junto con una o más condiciones que especifican el valor de la función (y, si es necesario, de sus derivadas) en un punto dado.

Definición intuitiva

Un problema con valores iniciales de primer orden tiene la forma general:

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y), \quad y(x_0) = y_0$$

Aquí:

- $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ es la ecuación diferencial,
- $y(x_0) = y_0$ es la condición inicial, que fija el valor de la solución en el punto $x = x_0$.

El objetivo es encontrar una función $y(x)$ que satisfaga simultáneamente la ecuación y la condición inicial.

Ejemplo 1: Primer orden

Resolvamos el siguiente problema con valor inicial:

$$\frac{dy}{dx} = 2x, \quad y(1) = 3$$

Primero resolvemos la ecuación diferencial:

$$y(x) = \int 2x\, dx = x^2 + C$$

Usamos la condición inicial $y(1) = 3$ para encontrar C:

$$3 = (1)^2 + C \quad \Rightarrow \quad C = 2$$

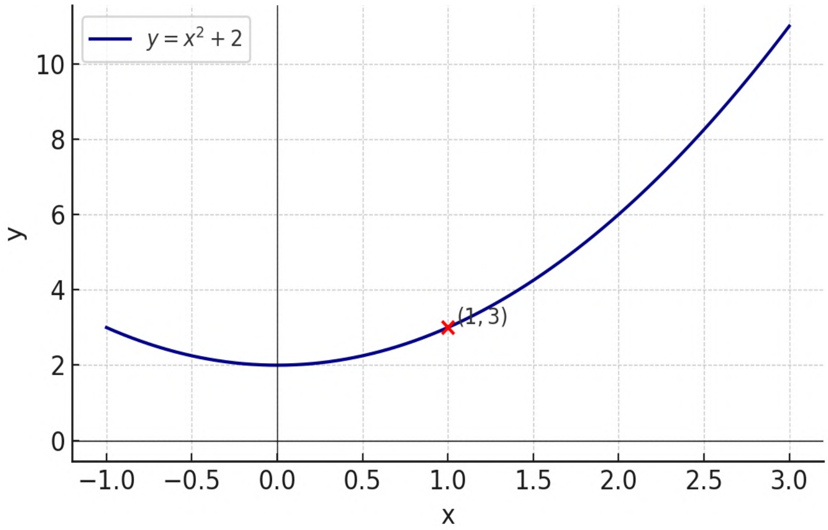
Por tanto, la solución particular es:

$$y(x) = x^2 + 2$$

Este tipo de problema es muy común en física, biología, economía y otras áreas donde es importante modelar no sólo el comportamiento general de un sistema, sino su evolución a partir de un estado inicial conocido.

Figura 43.

Gráfica de la solución particular y(x)=x^2+2



Nota: Autores (2026)

Formulación general

En el caso de una ecuación diferencial de orden n, un problema con valores iniciales se plantea de la forma:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f\left(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}\right)$$

acompañado de las condiciones:

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$$

Aquí, x_0 es un punto dado, y los valores $y_0, y_1, \dots, y_{n-1}$ son constantes reales especificadas. Estas condiciones fijan el valor de la función y de sus primeras derivadas en un solo punto, y se denominan condiciones iniciales.

El objetivo es encontrar una función $y(x)$ que satisfaga tanto la ecuación como las condiciones dadas.

En muchos sistemas físicos, la variable independiente suele ser el tiempo. Por ejemplo, si $y(t)$ representa la posición de un objeto y su derivada $y'(t)$ corresponde a la velocidad, entonces un problema con valores iniciales como $y(t_0) = y_0$ y $y'(t_0) = y_1$ especifica el estado del objeto en un instante inicial t_0. Es precisamente en este contexto donde surge con naturalidad el término *condición inicial*, ampliamente usado en la modelación de fenómenos dinámicos.

Ejemplo 2: Segundo orden

Considere la ecuación diferencial:

$$x'' + 9x = 0$$

Encuentre la solución del problema de valor inicial:

$$x(0) = 1, \quad x'(0) = 3$$

Sabemos que la solución general es:

$$x(t) = c_1 \cos(3t) + c_2 \sin(3t)$$

Interpretación geométrica. Resolver este problema con valores iniciales implica encontrar una curva que:

- Pase por el punto $(0,1)$, es decir, $x(0) = 1$,
- Y cuya pendiente en ese punto sea igual a 3, es decir, $x'(0) = 3$.

Esto significa que, entre todas las soluciones posibles de la ecuación diferencial, seleccionamos aquella que cumple exactamente con ambas condiciones. La derivada inicial determina la inclinación de la curva en el punto $t = 0$, lo cual se puede visualizar mediante la recta tangente en ese punto.

Cálculo de constantes.

Aplicamos las condiciones iniciales para determinar c_1 y c_2.

Evaluamos $x(0)$:

$$x(0) = c_1 \cos(0) + c_2 \sin(0) = c_1(1) + c_2(0) = c_1 \Rightarrow c_1 = 1$$

Derivamos la solución general:

$$x'(t) = -3c_1 \sin(3t) + 3c_2 \cos(3t)$$

Evaluamos $x'(0)$:

$$x'(0) = -3c_1 \cdot 0 + 3c_2 \cdot 1 = 3c_2 \Rightarrow c_2 = 1$$

Por tanto, la solución particular es:

$$x(t) = \cos(3t) + \sin(3t)$$

Recta tangente en $t = 0$. La recta tangente a la curva $x(t)$ en el punto $t = 0$ se obtiene como:

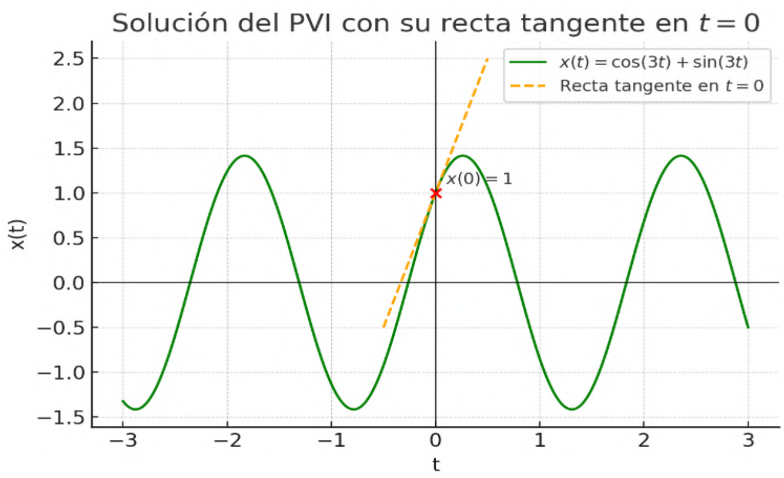
$$L(t) = x'(0)(t - 0) + x(0) = 3t + 1$$

Esta recta representa la dirección en la que parte la solución desde su punto inicial, y sirve para visualizar cómo influye la derivada en la forma de la curva.

En la siguiente figura se muestra la solución particular y su recta tangente en un entorno cercano a $t = 0$:

Figura 44.

Solución del problema con valor inicial x^"+9x=0.



Nota: Autores (2026)

3.5. Teoremas de existencia y unicidad (enfoque intuitivo y formal)

Cuando resolvemos un problema con valor inicial, como:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

una pregunta fundamental es: *¿Existe una solución que cumpla con esa condición? ¿Y esa solución es única?*

Estas preguntas no solo son teóricas. En modelos físicos, biológicos o económicos, es crucial saber si las condiciones iniciales determinan de forma inequívoca el comportamiento del sistema.

3.5.1.Interpretación geométrica del campo de direcciones

Una forma intuitiva de comprender cómo evolucionan las soluciones es mediante el uso de un **campo de direcciones**. Este se construye al asociar a cada punto (x, y) del plano un pequeño segmento de recta cuya pendiente es $f(x, y)$. Estos segmentos, llamados *elementos lineales*, indican la dirección que seguiría una solución si pasara por ese punto. Así, aunque no conozcamos la solución exacta, podemos visualizar hacia dónde se dirige.

Ejemplo gráfico:

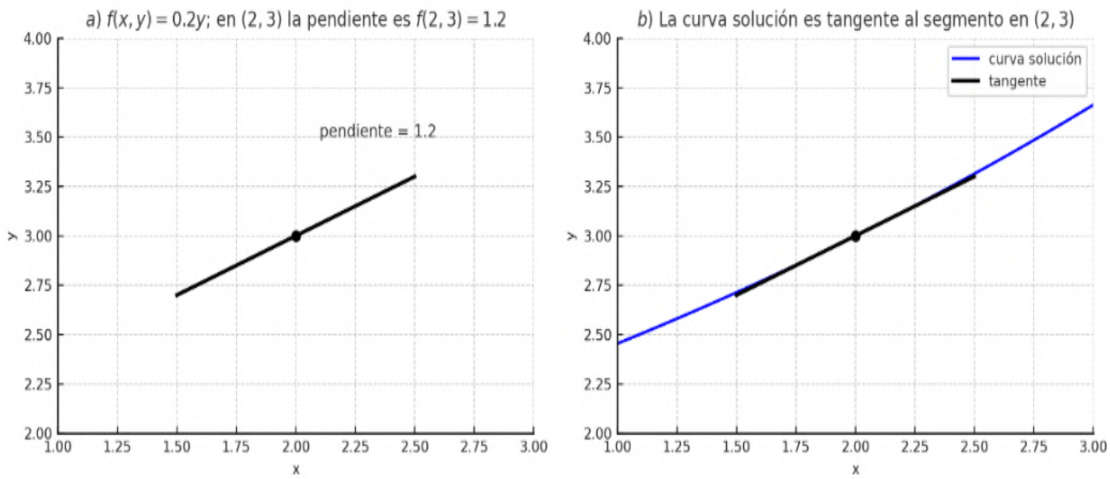
$\frac{dy}{dx} = 0.2y$ En el punto $(2,3)$, la pendiente es: $f(2,3) = 0.2 \cdot 3 = 0.6$

La siguiente figura muestra:

- En (a), el **elemento lineal** con pendiente 0.6 en el punto.
- En (b), una **curva solución** (de tipo $y = Ce^{0.2x}$) que pasa por ese punto y es tangente al campo.

Figura 45.

Campo de direcciones local para dy/dx=0.2y



Nota: Autores (2026)

Esta representación permite intuir que, si el campo de direcciones es suave y no presenta discontinuidades, desde un punto solo puede salir una curva solución. Esto nos conduce al teorema que formaliza esa idea.

3.5.2. Teorema de existencia y unicidad

Considérese el problema con valor inicial:

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y), \quad y(x_0) = y_0$$

Si la función $f(x,y)$ y su derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial y}$ son continuas en una región que contiene al punto (x_0, y_0), entonces:

- Existe una **única** solución $y(x)$ definida al menos en un intervalo alrededor de x_0.

Interpretación intuitiva: El teorema nos dice que el problema está *bien planteado*: hay una única trayectoria que parte de (x_0, y_0) y sigue las direcciones impuestas por la ecuación. Sin embargo, si alguna de las condiciones de continuidad falla, entonces puede que no exista solución, o que **existan varias soluciones distintas** para el mismo punto inicial.

3.5.3. Análisis cualitativo mediante campos de direcciones

Los campos de direcciones nos permiten evaluar si el comportamiento esperado de una EDO puede o no sostenerse con unicidad.

Ejemplo 1: Unicidad garantizada

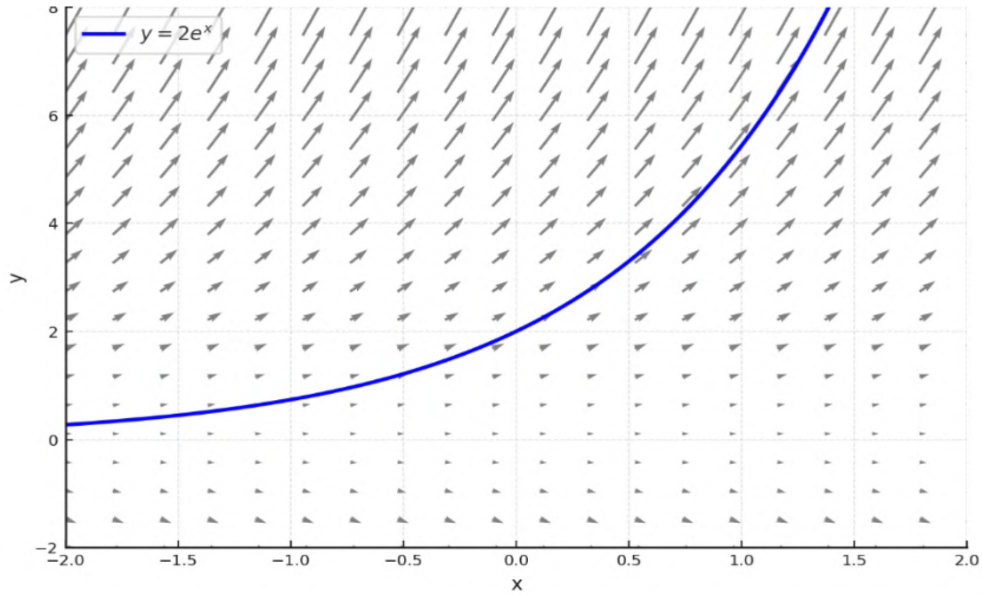
$$\frac{dy}{dx} = y, \quad y(0) = 2$$

La función $f(x,y) = y$ y su derivada $\frac{\partial f}{\partial y} = 1$ son continuas en todo el plano. Por tanto, el teorema se cumple. La única solución es:

$$y(x) = 2e^x$$

Figura 46.

Campo de direcciones para dy/dx=y



Nota: Autores (2026)

Ejemplo 2: Sin unicidad

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{|y|}, \quad y(0) = 0$$

Aunque $\sqrt{|y|}$ es continua, su derivada respecto a y no lo es en $y = 0$, por lo que el teorema no se puede aplicar. Y en efecto, hay múltiples soluciones que cumplen la condición inicial:

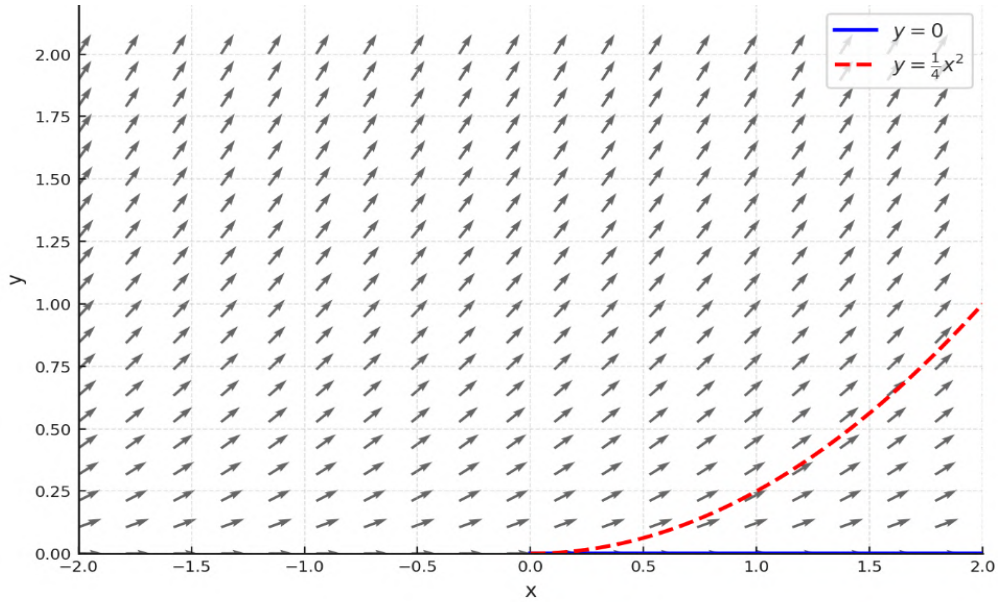
- $y(x) = 0$
- $y(x) = \frac{1}{4}(x - c)^2$, para $x \geq 0$ y $c = 0$

El campo de direcciones generado para $y \geq 0$ muestra ambas curvas pasando por $(0{,}0)$. Como podemos observar en la Figura 3.6, aunque el campo de direcciones ha sido generado únicamente para $y \geq 0$, es instructivo observar que si extendiéramos artificialmente el campo hacia $x < 0$, notaríamos que la curva $y = \frac{1}{4}x^2$ **ya no es tangente** a las flechas en esa región. Esto pone de manifiesto que **no toda curva suave puede ser considerada una solución de una EDO**, ya que debe ser tangente al campo de direcciones en todos los puntos de su dominio.

Esta representación ayuda a reforzar visualmente lo que el teorema de existencia y unicidad asegura: si las condiciones no se cumplen, pueden aparecer soluciones múltiples, o soluciones no únicas como en este caso. El campo de direcciones se convierte así en una herramienta poderosa para *analizar cualitativamente* el comportamiento de las soluciones y *detectar posibles bifurcaciones o ambigüedades*.

Figura 47.

Campo de direcciones para dy/dx=√(|y|)



Nota: Autores (2026)

3.6. Superposición de curvas solución en campos de direcciones

Una vez entendido qué representa un campo de direcciones, podemos dar un paso más allá y visualizar cómo se comportan diferentes soluciones de una ecuación diferencial al ser superpuestas sobre dicho campo.Un campo de direcciones proporciona una "guía" local: en cada punto, la pendiente de la curva solución debe coincidir con la dirección de la flecha. Esto significa que una curva es una **solución válida** de la EDO si y solo si es **tangente al campo en todos sus puntos**.

Ejemplo ilustrativo: Consideremos la ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dx} = y - x$$

Para construir el campo de direcciones, calculamos la pendiente en distintos puntos del plano usando la función $f(x, y) = y - x$. Luego, podemos intentar representar algunas curvas que podrían ser soluciones de esta ecuación.

Para visualizar el comportamiento de las soluciones de la ecuación sin resolverla de forma explícita, se construye un campo de direcciones. Este se elabora de la siguiente manera:

a) **Elegir una malla de puntos:** se selecciona un conjunto de coordenadas (x, y) sobre una cuadrícula. Por ejemplo, $x = -3, -2, \dots, 3$ y $y = -3, -2, \dots, 3$.

b) **Evaluar la pendiente en cada punto:** se evalúa la función que define la ecuación diferencial, es decir, $f(x, y) = y - x$. Esta evaluación nos da directamente la pendiente que tendría una solución si pasara por ese punto. Ejemplos:

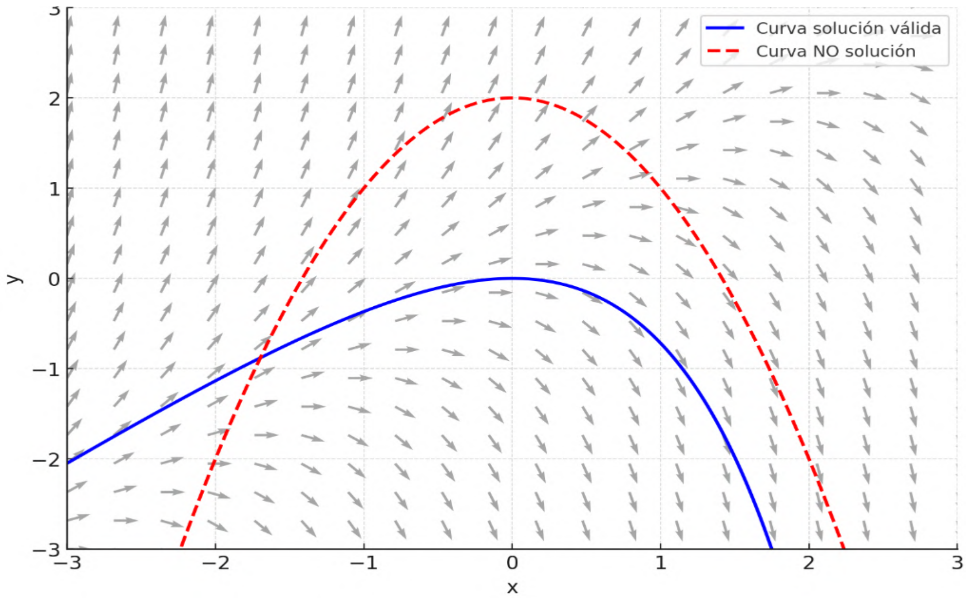
- $f(0,0) = 0 \rightarrow$ pendiente horizontal.
- $f(2,1) = -1 \rightarrow$ pendiente negativa.
- $f(-1,2) = 3 \rightarrow$ pendiente positiva e inclinada.

c) **Dibujar un pequeño segmento con esa pendiente:** en cada punto se traza un segmento que indica la dirección que seguiría una curva si pasara por allí.

d) **Curvas tangentes al campo:** una curva es solución de la EDO si en cada punto es tangente a la dirección del campo. Esto permite explorar el comportamiento cualitativo de las soluciones, incluso sin conocer su expresión analítica.

Figura 48.

Campo de direcciones para dy/dx=y-x con dos curvas



Nota: Autores (2026)

En la figura se muestran:

- Un conjunto de flechas que representan el campo de direcciones.
- Una curva azul que es *tangente al campo* en cada punto.
- Una curva roja punteada que *no respeta* las pendientes, por lo tanto, **no es solución**.

Idea clave: Un campo de direcciones no muestra soluciones exactas, pero sí delimita todas las posibles trayectorias que una solución puede seguir. Las curvas que no respetan las pendientes indicadas por el campo no pueden ser soluciones válidas.

Esta representación visual es particularmente útil cuando no se puede encontrar la solución explícita de la ecuación diferencial. En tales casos, el campo de direcciones permite aproximar soluciones y explorar su comportamiento cualitativo: crecimiento, decrecimiento, puntos críticos, convergencia o divergencia.

Verificación de tangencia mediante cálculo

Para reforzar la idea de tangencia entre una curva y su campo de direcciones, realizamos una comprobación formal utilizando derivadas.

Curva azul: Sea la función solución:

$$y(x) = x + 1 - e^{x}$$

Calculemos su derivada y verifiquemos que satisface la ecuación $\frac{dy}{dx} = y - x$:

- $y(0) = 0 + 1 - 1 = 0$
- $\frac{dy}{dx} = 1 - e^{x} \Rightarrow \frac{dy}{dx}(0) = 0$
- Evaluamos el campo en el mismo punto: $f(0, y(0)) = 0 - 0 = 0$

Como la derivada de la función y la pendiente del campo coinciden en ese punto, concluimos que la curva es **tangente al campo** y, por tanto, **una solución válida**.

3.6.1.1.1. Curva roja:

Sea la función $y(x) = -x^2 + 2$, que se ha dibujado como posible solución:

- $y(0) = 2$
- $\frac{dy}{dx} = -2x \Rightarrow \frac{dy}{dx}(0) = 0$
- Evaluamos el campo: $f(0,2) = 2 - 0 = 2$

En este caso, la pendiente de la curva y la del campo **no coinciden**, por lo que la curva **no es tangente** al campo y **no puede ser una solución**.

3.6.1.2. Visualización digital: Campo de direcciones en MATLAB

A continuación, se presenta un script en **MATLAB** que permite construir de forma automática el campo de direcciones correspondiente a la ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dx} = x - y$$

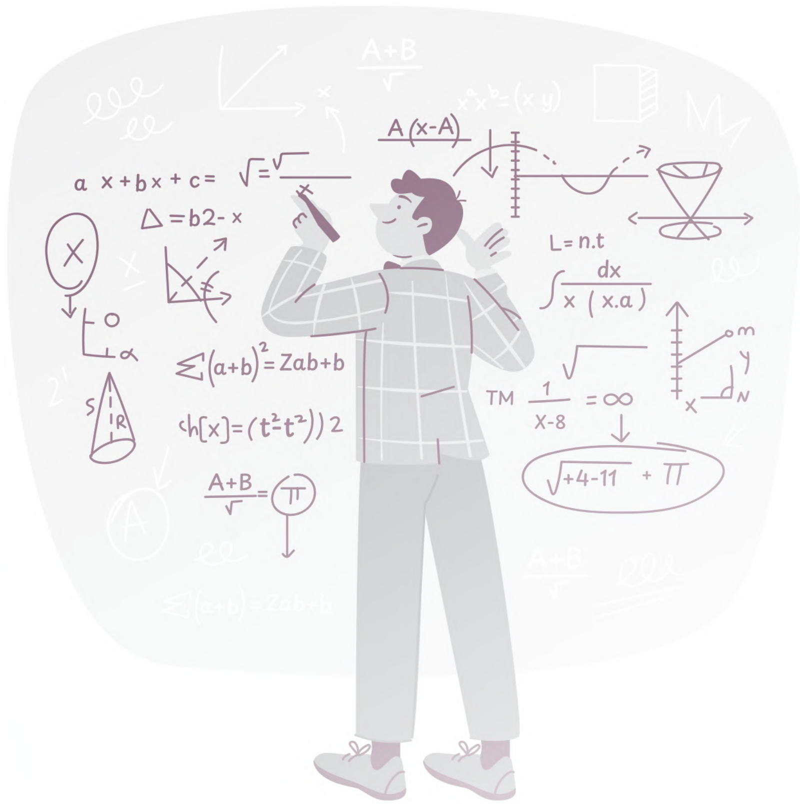
El código genera una malla de puntos en el plano, evalúa la pendiente en cada punto y dibuja una flecha en la dirección correspondiente.

Código MATLAB para graficar el campo de direcciones de dy/dx = x − y

```
% Definir una malla de puntos (x, y) sobre el plano
[x, y] = meshgrid(-1:0.5:2, -4:0.5:2);

% Evaluar la pendiente en cada punto de la malla
%usando la EDO: dy/dx = y - x
dydx = y - x;

% Calcular la magnitud de cada vector para normalizarlo
% magnitude = sqrt(1 + dydx.^2);

% Normalizar los vectores para que todas las flechas tengan
% la misma longitud
u = 1 ./ magnitude;        % Componente horizontal (x) del vector
                           % normalizado
v = dydx ./ magnitude;     % Componente vertical (y) del vector
                           % normalizado

% Crear la figura y graficar el campo de direcciones
figure;
quiver(x, y, u, v, 0.5, 'k'); % Dibuja flechas negras del campo
hold on;                      % Mantener la figura activa para
                              % añadir la curva solución

% Añadir título y etiquetas de ejes
title('Campo de direcciones para dy/dx = y - x');
xlabel('x');
ylabel('y');
axis tight;  % Ajusta los límites de los ejes al contenido
grid on;     % Añade rejilla para facilitar la lectura

% Graficar la curva solución y = x + 1 - exp(x)
x_vals = linspace(-1, 2, 200);        % Crear valores de x para
                                      % graficar la solución
y_vals = x_vals + 1 - exp(x_vals);    % Evaluar la solución en
                                      % esos puntos
plot(x_vals, y_vals, 'b', 'LineWidth', 2); % Dibujar curva
                                           % solución azul

% Añadir leyenda
legend('Campo de direcciones', 'Curva solución \( y = x + 1 - e^x
   \)', 'Location', 'best');

hold off; % Finalizar la figura
```

CAPITULO 04

Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden



Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden

Introducción general

Las ecuaciones diferenciales de primer orden son fundamentales en el estudio de modelos que describen fenómenos dinámicos donde interviene una única derivada de la función incógnita. Su sencillez estructural permite una amplia gama de aplicaciones, desde problemas de crecimiento poblacional y leyes de enfriamiento hasta circuitos eléctricos y movimientos de cuerpos.

En esta unidad se estudiarán las principales familias de ecuaciones de primer orden que pueden resolverse analíticamente. Para cada una se presentará su forma característica, el método de solución correspondiente, ejemplos resueltos paso a paso y, cuando sea posible, una interpretación geométrica o visual.

Además, se explorarán técnicas como las sustituciones útiles y el uso de factores integrantes, herramientas que permiten transformar ecuaciones no resolubles directamente en formas más accesibles. Finalmente, se reforzará el concepto de condición inicial, elemento clave para seleccionar una solución única dentro de la familia general.

4.1. Ecuaciones de variables separables

Muchas ecuaciones diferenciales de primer orden se pueden resolver mediante el método de separación de variables. Este método es uno de los más directos y accesibles, y se aplica cuando la ecuación puede escribirse como el producto de una función de x y otra de y.

4.1.1. Definición

Una ecuación diferencial de primer orden se dice **de variables separables** si puede expresarse en la forma:

$$\frac{dy}{dx} = g(x) \cdot h(y)$$

Esto permite separar las variables multiplicativamente y reescribir la ecuación como:

$$\frac{1}{h(y)}\,dy = g(x)\,dx$$

De este modo, ambas variables quedan en lados opuestos de la ecuación y se puede integrar directamente.

Método de resolución

Para resolver una ecuación de variables separables:

1) **Separar las variables:** Reescribir la ecuación en la forma

$$\frac{1}{h(y)}\,dy = g(x)\,dx$$

2) **Integrar ambos lados:**

$$\int \frac{1}{h(y)}\,dy = \int g(x)\,dx$$

3) **Resolver la ecuación resultante:** Obtener y como función explícita o implícita de x, según sea posible.

4) **(Opcional) Aplicar condiciones iniciales** si se desea hallar una solución particular.

Ejemplo 1

Resolvamos la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dx} = x \cdot y$$

- **Paso 1. Separar variables:**

$$\frac{1}{y}\,dy = x\,dx$$

- **Paso 2. Integrar ambos lados:**

$$\int \frac{1}{y}\,dy = \int x\,dx \quad \Rightarrow \quad \ln|y| = \frac{x^2}{2} + C$$

- **Paso 3. Despejar y:**

$$|y| = e^{\frac{x^2}{2}+C} = Ce^{\frac{x^2}{2}} \quad \text{(donde } C > 0\text{)}$$

$$\Rightarrow y(x) = \pm Ce^{\frac{x^2}{2}} \quad \text{o simplemente } y(x) = Ce^{\frac{x^2}{2}}$$

Ejemplo 2

Resolvamos la ecuación:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y+1}$$

- **Paso 1.** Separar variables:

$$(y+1)\,dy = x\,dx$$

- **Paso 2**. Integrar ambos lados:

$$\int (y+1)\,dy = \int x\,dx \Rightarrow \frac{y^2}{2} + y = \frac{x^2}{2} + C$$

- **Paso 3.** Forma implícita:

$$\frac{y^2}{2} + y - \frac{x^2}{2} = C$$

- **Paso 4.** (Opcional) Forma explícita resolviendo la ecuación cuadrática

Multiplicamos por 2:

$$y^2 + 2y = x^2 + C' \quad \text{donde } C' = 2C$$

Esto es una ecuación cuadrática en y, que se resuelve como:

$$y = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 4(x^2 + C')}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{1 + x^2 + C'}}{2} = -1 \pm \sqrt{1 + x^2 + C'}$$

Nota: Esta forma explícita presenta dos posibles ramas. Sin una condición inicial, no es posible determinar cuál de ellas corresponde a la solución buscada. Por ello, muchas veces es preferible dejar la solución en forma implícita.

4.2. Ecuaciones lineales de primer orden

Las ecuaciones diferenciales lineales de primer orden constituyen una clase muy importante y frecuente en aplicaciones físicas, químicas, biológicas y económicas. Su estructura permite aplicar un método general de resolución basado en el uso del **factor integrante**.

4.2.1. Definición

Una ecuación diferencial de primer orden se dice **lineal** si puede escribirse en la forma:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

donde $P(x)$ y $Q(x)$ son funciones continuas de la variable independiente x en un intervalo dado.

4.2.1.1. Método de resolución mediante factor integrante

Para resolver una ecuación de la forma:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

se sigue el siguiente procedimiento:

1) **Calcular el factor integrante:**

$$\mu(x) = e^{\int P(x)\,dx}$$

2) **Multiplicar toda la ecuación por $\mu(x)$:**

$$\mu(x)\frac{dy}{dx} + \mu(x)P(x)y = \mu(x)Q(x)$$

3) **El lado izquierdo se convierte en la derivada de un producto:**

$$\frac{d}{dx}[\mu(x)y] = \mu(x)Q(x)$$

4) **Integrar ambos lados:**

$$\mu(x)y = \int \mu(x)Q(x)\,dx + C$$

5) Despejar $y(x)$:

$$y(x) = \frac{1}{\mu(x)}\left(\int \mu(x)Q(x)\,dx + C\right)$$

4.2.2.¿Por qué se calcula el factor integrante?

La ecuación diferencial lineal de primer orden tiene esta forma:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

Este tipo de ecuaciones no puede resolverse directamente a menos que podamos convertirla en una forma integrable, como:

$$\frac{d}{dx}[\mu(x)y] = \mu(x)Q(x)$$

La función $\mu(x)$ que usamos para multiplicar ambos lados se llama **factor integrante**. Su propósito es transformar el lado izquierdo en la derivada exacta de un producto, es decir, convertir la ecuación en una forma que se pueda integrar con facilidad.

¿Por qué se usa la función exponencial?

Veamos cómo se obtiene:

Queremos que al multiplicar la ecuación por $\mu(x)$, el lado izquierdo se convierta en:

$$\mu(x)\frac{dy}{dx} + \mu(x)P(x)y = \frac{d}{dx}[\mu(x)y]$$

Aplicando la regla del producto a la derivada de $\mu(x)y$:

$$\frac{d}{dx}[\mu(x)y] = \mu'(x)y + \mu(x)\frac{dy}{dx}$$

Entonces, para que las expresiones coincidan, necesitamos que:

$$\mu'(x)y = \mu(x)P(x)y \quad \Rightarrow \quad \mu'(x) = \mu(x)P(x)$$

Esta última es una **ecuación diferencial separable**, cuya solución se encuentra del siguiente modo:

Paso 1: Separar variables

$$\frac{1}{\mu}\,d\mu = P(x)\,dx$$

Paso 2: Integrar ambos lados

$$\int \frac{1}{\mu}\,d\mu = \int P(x)\,dx \Rightarrow \ln|\mu(x)| = \int P(x)\,dx$$

(Nótese que omitimos la constante de integración, ya que se absorbe luego en la constante general de la solución).

Paso 3: Despejar $\mu(x)$

$$\mu(x) = e^{\int P(x)\,dx}$$

Resultado final: Esta es la razón por la que el factor integrante toma la forma exponencial. Su propósito es permitir que el lado izquierdo de la ecuación original se transforme en una derivada de producto, lo que facilita su resolución mediante integración directa.

Ejemplos resueltos de ecuaciones lineales

Ejemplo 1

Resolver la ecuación:

$$\frac{dy}{dx} + y = 2$$

- **Paso 1. Identificar $P(x)$ y $Q(x)$:**

$$P(x) = 1, \quad Q(x) = 2$$

- **Paso 2. Calcular el factor integrante:**

$$\mu(x) = e^{\int P(x)\,dx} = e^{\int 1\,dx} = e^{x}$$

- **Paso 3. Multiplicar toda la ecuación por $\mu(x) = e^{x}$:**

$$e^{x}\frac{dy}{dx} + e^{x}y = 2e^{x}$$
$$\Rightarrow \frac{d}{dx}(e^{x}y) = 2e^{x}$$

- **Paso 4. Integrar ambos lados:**

$$e^x y = \int 2e^x \, dx = 2e^x + C$$

- **Paso 5. Despejar y:**

$$y(x) = 2 + Ce^{-x}$$

Ejemplo 2

Resolver la ecuación:

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x} y = \sin(x), \quad x > 0$$

- **Paso 1. Identificar $P(x)$ y $Q(x)$:**

$$P(x) = \frac{2}{x}, \quad Q(x) = \sin(x)$$

- **Paso 2. Calcular el factor integrante:**

$$\mu(x) = e^{\int \frac{2}{x} dx} = e^{2\ln|x|} = x^2 \quad (\text{válido para } x > 0)$$

- **Paso 3. Multiplicar toda la ecuación por x^2:**

$$x^2 \frac{dy}{dx} + 2xy = x^2 \sin(x)$$
$$\Rightarrow \frac{d}{dx}(x^2 y) = x^2 \sin(x)$$

- **Paso 4. Integrar ambos lados:**

$$x^2 y = \int x^2 \sin(x) \, dx + C$$

Aplicamos integración por partes:

$$\int x^2 \sin(x) \, dx = -x^2 \cos(x) + 2x\sin(x) + 2\cos(x)$$

- **Paso 5. Despejar y:**

$$x^2 y = -x^2 \cos(x) + 2x\sin(x) + 2\cos(x) + C$$

$$\Rightarrow y(x) = \frac{-x^2 \cos(x) + 2x\sin(x) + 2\cos(x) + C}{x^2}$$

Ejemplo 3

Resolver la ecuación:

$$\frac{dy}{dx} - \tan(x)y = \sec(x), \quad \text{con } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$

- **Paso 1. Identificar $P(x)$ y $Q(x)$:**

$$P(x) = -\tan(x), \quad Q(x) = \sec(x)$$

- **Paso 2. Calcular el factor integrante:**

$$\mu(x) = e^{\int -\tan(x)\,dx} = e^{\ln(\cos(x))} = \cos(x)$$

- **Paso 3. Multiplicar toda la ecuación por $\cos(x)$:**

$$\cos(x)\frac{dy}{dx} - \cos(x)\tan(x)y = \cos(x)\sec(x)$$
$$\Rightarrow \frac{d}{dx}[\cos(x)y] = 1$$

- **Paso 4. Integrar ambos lados:**

$$\cos(x)y = \int 1\,dx = x + C$$
$$\Rightarrow y(x) = \frac{x + C}{\cos(x)}$$

4.3. Ecuaciones exactas

Las ecuaciones exactas constituyen una clase importante de ecuaciones diferenciales de primer orden. Tienen una estructura especial que permite resolverlas mediante funciones potenciales, es decir, derivadas totales de una función escalar de dos variables.

Una ecuación diferencial se dice **exacta** si puede escribirse en la forma:

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$$

y existe una función $\psi(x, y)$ tal que:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = M(x, y), \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = N(x, y)$$

Entonces, la ecuación se convierte en:

$$d\psi = 0 \quad \Rightarrow \quad \psi(x,y) = C$$

donde C es una constante arbitraria.

Conceptos clave

¿Qué tipo de función es $\psi(x,y)$?

Es una función escalar de dos variables: $\psi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Esto quiere decir que el valor de ψ depende tanto de x como de y.

Por tanto, no podemos hablar de una única derivada como en funciones de una sola variable: necesitamos considerar cómo cambia ψ cuando cambia cada una de sus variables de forma independiente.

Derivadas parciales. La derivada parcial con respecto a x, denotada $\frac{\partial \psi}{\partial x}$, indica cómo cambia ψ si variamos solo x y mantenemos y constante. Análogamente para $\frac{\partial \psi}{\partial y}$.

Diferencial total. Representa el cambio total de la función cuando cambian ambas variables a la vez:

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy$$

Cada término indica el cambio producido por una variación en x o en y, respectivamente. Sumados, dan el cambio total de ψ.

Relación con ecuaciones exactas. Si se cumple que $M = \frac{\partial \psi}{\partial x}$ y $N = \frac{\partial \psi}{\partial y}$, entonces la ecuación diferencial puede escribirse como:

$$Mdx + Ndy = d\psi \quad \Rightarrow \quad d\psi = 0 \Rightarrow \psi(x,y) = C$$

Interpretación geométrica. $\psi(x,y) = C$ representa una curva de nivel (por ejemplo, líneas de altitud en una montaña). Caminar a lo largo de esa curva no cambia el valor de ψ, lo que se expresa con $d\psi = 0$.

Criterio de exactitud

Para que la ecuación sea exacta, debe cumplirse:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

en una región donde M y N sean continuas y tengan derivadas parciales continuas.

Método de resolución

1) **Verificar que la ecuación es exacta:**

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

2) **Integrar $\boldsymbol{M(x,y)}$ respecto de $\boldsymbol{x}$:**

$$\psi(x,y) = \int M(x,y)\,dx + h(y)$$

donde $h(y)$ es una función a determinar.

3) **Derivar $\boldsymbol{\psi(x,y)}$ respecto a $\boldsymbol{y}$:**

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x,y)\,dx\right) + h'(y)$$

4) **Igualar con $\boldsymbol{N(x,y)}$ y despejar $\boldsymbol{h'(y)}$:**

$$h'(y) = N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x,y)\,dx\right)$$

Luego se integra para obtener $h(y)$.

5) **Escribir la solución general:**

$$\psi(x,y) = C$$

Ejemplo 1

Resuelve la ecuación:

$$(2x + y)\,dx + (x + 3y^2)\,dy = 0$$

- **Paso 1: Verificar la exactitud**

$M(x,y) = 2x + y,\ N(x,y) = x + 3y^2$

$\frac{\partial M}{\partial y} = 1,\ \frac{\partial N}{\partial x} = 1$

Como $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$, la ecuación es exacta.

- **Paso 2: Integrar $\boldsymbol{M}$ respecto a $\boldsymbol{x}$**

$$\psi(x,y) = \int (2x + y)\,dx = x^2 + xy + h(y)$$

- **Paso 3: Derivar $\boldsymbol{\psi}$ respecto a $\boldsymbol{y}$**

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = x + h'(y) \Rightarrow x + h'(y) = x + 3y^2$$

$$\Rightarrow h'(y) = 3y^2 \Rightarrow h(y) = y^3 + C$$

- **Paso 4: Solución general**

$$\psi(x,y) = x^2 + xy + y^3 = C$$

Ejemplo 2

Resuelve la ecuación:

$$(3x^2 - y)\,dx + (-x + 4y^3)\,dy = 0$$

- **Paso 1: Verificar la exactitud**

$M = 3x^2 - y,\ N = -x + 4y^3\ \frac{\partial M}{\partial y} = -1,\ \frac{\partial N}{\partial x} = -1$

Como $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$, la ecuación es exacta.

- **Paso 2: Integrar $\boldsymbol{M}$ respecto a $\boldsymbol{x}$**

$$\psi(x,y) = \int (3x^2 - y)\,dx = x^3 - xy + h(y)$$

- **Paso 3: Derivar $\boldsymbol{\psi}$ respecto a $\boldsymbol{y}$**

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = -x + h'(y) = N(x,y) \Rightarrow h'(y) = 4y^3$$

$$\Rightarrow h(y) = y^4 + C$$

- **Paso 4: Solución general**

$$\psi(x,y) = x^3 - xy + y^4 = C$$

Ejemplo 3

Resuelve la ecuación:

$$(e^x \cos y + y)\,dx + (-e^x \sin y + x)\,dy = 0$$

- **Paso 1: Verificar la exactitud**

$M = e^x \cos y + y$, $N = -e^x \sin y + x$

$\frac{\partial M}{\partial y} = -e^x \sin y + 1$, $\frac{\partial N}{\partial x} = -e^x \sin y + 1$

Como $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$, la ecuación es exacta.

- **Paso 2: Integrar $\boldsymbol{M}$ respecto a $\boldsymbol{x}$**

$$\psi(x,y) = \int (e^x \cos y + y)\,dx = e^x \cos y + xy + h(y)$$

- **Paso 3: Derivar $\boldsymbol{\psi}$ respecto a $\boldsymbol{y}$**

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = -e^x \sin y + x + h'(y) = N(x,y) \Rightarrow h'(y) = 0 \Rightarrow h(y) = C$$

- **Paso 4: Solución general**

$$\psi(x,y) = e^x \cos y + xy = C$$

4.4. Resolución de ecuaciones con condiciones iniciales

Cuando se conoce una condición del tipo $y(x_0) = y_0$, se puede encontrar la **solución particular** de una ecuación diferencial que ya se ha resuelto en su forma general. Esto se logra sustituyendo el punto dado para determinar el valor de la constante de integración.

Ejemplo 1 – Ecuación de variables separables

Resuelve:

$$\frac{dy}{dx} = 2xy, \quad y(0) = 3$$

Paso 1: Separar variables

$$\frac{1}{y}\,dy = 2x\,dx$$

Paso 2: Integrar ambos lados

$$\int \frac{1}{y}\,dy = \int 2x\,dx \Rightarrow \ln|y| = x^2 + C$$

Paso 3: Despejar y

$$|y| = e^{x^2+C} = Ce^{x^2} \Rightarrow y = Ce^{x^2}$$

Paso 4: Usar la condición inicial $y(0) = 3$

$$y(0) = C \cdot e^0 = C \Rightarrow C = 3$$

Solución particular

$$y = 3e^{x^2}$$

Ejemplo 2 – Ecuación lineal de primer orden

Resuelve:

$$\frac{dy}{dx} + y = 2x, \quad y(0) = 1$$

Paso 1: Identificar los coeficientes:

$P(x) = 1,\ Q(x) = 2x$

Factor integrante:

$$\mu(x) = e^{\int P(x)\,dx} = e^x$$

Paso 2: Multiplicar toda la ecuación por $\mu(x)$

$$e^x \frac{dy}{dx} + e^x y = 2xe^x$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}(e^x y) = 2xe^x$$

Paso 3: Integrar el miembro derecho

$$\int 2xe^x\,dx = 2xe^x - 2e^x$$

$$e^x y = 2xe^x - 2e^x + C \Rightarrow y = 2x - 2 + Ce^{-x}$$

Paso 4: Aplicar y(0)=1

$$1 = 0 - 2 + C \Rightarrow C = 3$$

Solución particular

$$y = 2x - 2 + 3e^{-x}$$

Ejemplo 3 – Ecuación exacta con condición inicial

Resuelve:

$$(2x + y)\,dx + (x + 3y^2)\,dy = 0, \quad y(1) = 1$$

Paso 1: Verificar la exactitud

$$M(x,y) = 2x + y, \quad N(x,y) = x + 3y^2$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 1$$

Como $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$, la ecuación es exacta.

Paso 2: Integrar M respecto de x

$$\psi(x,y) = \int (2x + y)\,dx = x^2 + xy + h(y)$$

Paso 3: Derivar respecto a y e igualar con N

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = x + h'(y) \Rightarrow x + h'(y) = x + 3y^2$$

$$\Rightarrow h'(y) = 3y^2 \Rightarrow h(y) = y^3 + C$$

Paso 4: Solución general

$$\psi(x,y) = x^2 + xy + y^3 = C$$

Paso 5: Aplicar la condición inicial y(1)=1

$$1^2 + 1(1) + 1^3 = C \Rightarrow C = 3$$

Solución particular

$$x^2 + xy + y^3 = 3$$

Resumen comparativo de métodos de resolución

A continuación, se presenta un resumen con las formas típicas de ecuaciones diferenciales de primer orden, el procedimiento usual para resolverlas, y su forma general de solución.

Tabla 5.

Comparación de métodos de resolución para EDOs de primer orden

Método	Forma estándar	Procedimiento clave	Solución general
VS	$\frac{dy}{dx} = g(x)h(y)$	Separar variables: $\frac{1}{h(y)}\,dy = g(x)\,dx$ e integrar	$\int \frac{1}{h(y)}\,dy = \int g(x)\,dx + C$
EL	$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$	Multiplicar por el factor integrante: $\mu(x) = e^{\int P(x)\,dx}$	$y = \frac{1}{\mu(x)}\left(\int \mu(x)Q(x)\,dx + C\right)$
EE	$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$	Integrar M respecto a x, luego comparar con N para encontrar $h(y)$	$\psi(x,y) = C$, donde $d\psi = M\,dx + N\,dy$

Nota: Autores (2026).

Observaciones:

- Si no es posible separar variables ni tiene forma lineal, verificar si es exacta.
- Si la ecuación no es exacta, puede ser transformada en exacta mediante un **factor integrante**, que se estudia más adelante.
- Las **condiciones iniciales** permiten determinar la constante de integración y obtener una solución particular.

4.5. Modelado con EDOs de primer orden

En esta sección se exploran situaciones reales que pueden representarse mediante ecuaciones diferenciales de primer orden. Muchos fenómenos físicos, químicos y biológicos presentan tasas de cambio que dependen de la cantidad presente en un instante dado. Esto permite construir modelos matemáticos útiles para predecir su comportamiento a futuro.

4.5.1. Desintegración radiactiva

Un caso clásico es la desintegración de una sustancia radiactiva, donde la tasa de desintegración es directamente proporcional a la cantidad de material presente. Este tipo de procesos da lugar a una ecuación de la forma:

$$\frac{dm}{dt} = -km,$$

donde:

- $m(t)$: masa del material en el instante t,
- $k > 0$: constante de desintegración.

Ejemplo: Un laboratorio detecta que un nuevo isótopo se desintegra a una tasa proporcional a su masa. Se dispone inicialmente de 50 mg del isótopo, y al cabo de dos horas se ha reducido al 90% de la masa original.

- Encuentre una expresión para la masa restante en función del tiempo.
- ¿Cuánta masa queda después de 4 horas?
- ¿Cuál es la vida media del material?

Solución:

a) Modelado de la ecuación y solución general

La ecuación diferencial que describe este fenómeno es:

$$\frac{dm}{dt} = -km,$$

que es de variables separables. Separando e integrando:

$$\int \frac{1}{m}\,dm = -\int k\,dt \Rightarrow \ln|m| = -kt + C.$$

Aplicando exponencial a ambos lados:

$$m(t) = Ce^{-kt}.$$

Usamos la condición inicial $m(0) = 50$ para determinar C:

$$m(0) = Ce^0 = C \Rightarrow C = 50 \Rightarrow m(t) = 50e^{-kt}.$$

b) Usamos el dato adicional para determinar k

Se sabe que después de 2 horas queda el 90%:

$$m(2) = 0.9 \cdot 50 = 45 = 50e^{-2k} \Rightarrow \frac{45}{50} = e^{-2k} \Rightarrow e^{-2k} = 0.9.$$

Aplicamos logaritmo:

$$-2k = \ln(0.9) \Rightarrow k = -\frac{1}{2}\ln(0.9) \approx 0.05268.$$

Entonces:

$$m(t) = 50e^{-0.05268t}.$$

c) Masa después de 4 horas

$$m(4) = 50e^{-0.05268 \cdot 4} \approx 50 \cdot e^{-0.2107} \approx 50 \cdot 0.8106 \approx 40.53 \text{ mg}.$$

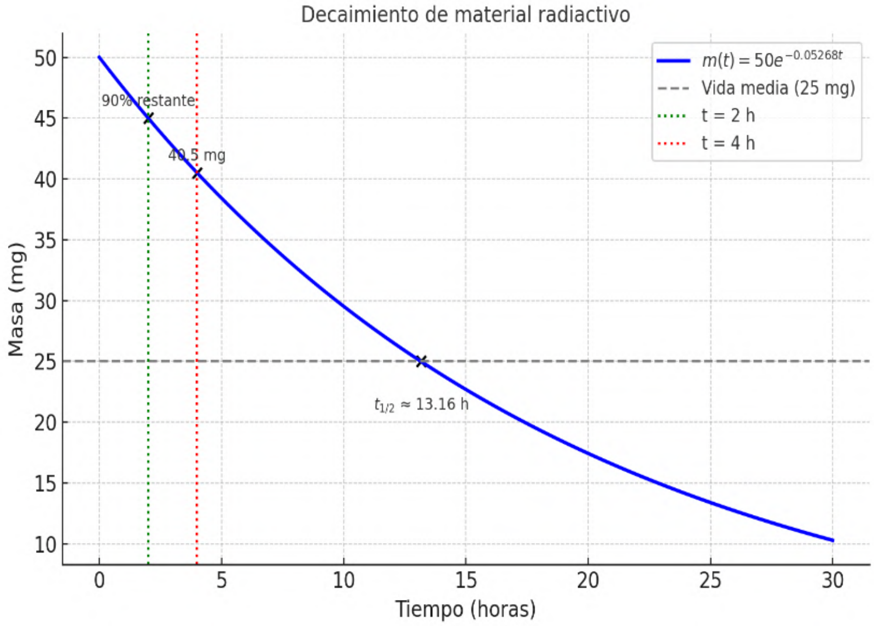
d) Vida media

La vida media es el tiempo $t_{1/2}$ tal que $m(t_{1/2}) = \frac{1}{2}m_0$. Usamos:

$$\frac{1}{2} = e^{-kt_{1/2}} \Rightarrow t_{1/2} = \frac{\ln(2)}{k} = \frac{\ln(2)}{0.05268} \approx 13.16 \text{ horas}.$$

Gráfica: La curva azul muestra la masa en función del tiempo. Las líneas punteadas indican los valores de masa en tiempos clave (2 h, 4 h, vida media).

Figura 49.
Gráfica de la desintegración radiactiva.



Nota: Autores (2026).

La curva representa la disminución exponencial de la masa del material radiactivo a lo largo del tiempo. Se observa cómo la masa se reduce rápidamente al inicio y se aproxima asintóticamente a cero sin alcanzarlo. Se destac4.5.2. an puntos relevantes: el 90% de masa restante a las 2 horas, el valor exacto después de 4 horas, y el tiempo correspondiente a la vida media. Esta visualización permite comprender de manera intuitiva la velocidad del proceso de desintegración y verificar gráficamente los resultados obtenidos analíticamente.

4.5.2. Enfriamiento de Newton

Cuando un cuerpo caliente se coloca en un ambiente más frío, su temperatura disminuye con el tiempo. La **ley de enfriamiento de Newton** establece que la rapidez con la que cambia la temperatura de un objeto es proporcional a la diferencia entre su temperatura y la del ambiente.

Modelo:

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_{\text{amb}})$$

donde:

- $T(t)$: temperatura del cuerpo en el tiempo t,

- T_{amb}: temperatura constante del ambiente,
- $k > 0$: constante de enfriamiento.

Ejemplo: Una taza de café recién servido tiene una temperatura de $90°$C. Se coloca en una habitación a $20°$C. Después de 5 minutos, la temperatura ha bajado a $70°$C.

- Encuentre una expresión para la temperatura del café en función del tiempo.
- ¿Cuál será la temperatura después de 10 minutos?
- ¿Cuánto tiempo tomará en alcanzar $30°$C?

Solución:

a) Resolución de la EDO

$$\frac{dT}{dt} = -k(T-20) \Rightarrow \text{ Ecuación lineal con } \mu(t) = e^{kt}$$

Multiplicamos:

$$e^{kt}\frac{dT}{dt} + ke^{kt}T = 20ke^{kt} \Rightarrow \frac{d}{dt}(e^{kt}T) = 20ke^{kt}$$

Integrando:

$$e^{kt}T = 20e^{kt} + C \Rightarrow T(t) = 20 + Ce^{-kt}$$

Condición inicial $T(0) = 90 \Rightarrow C = 70$, entonces:

$$T(t) = 20 + 70e^{-kt}$$

Dado que $T(5) = 70$, sustituimos:

$$70 = 20 + 70e^{-5k} \Rightarrow e^{-5k} = \frac{5}{7} \Rightarrow k \approx 0.0673$$

$$\boxed{T(t) = 20 + 70e^{-0.0673t}}$$

b) Temperatura luego de 10 minutos

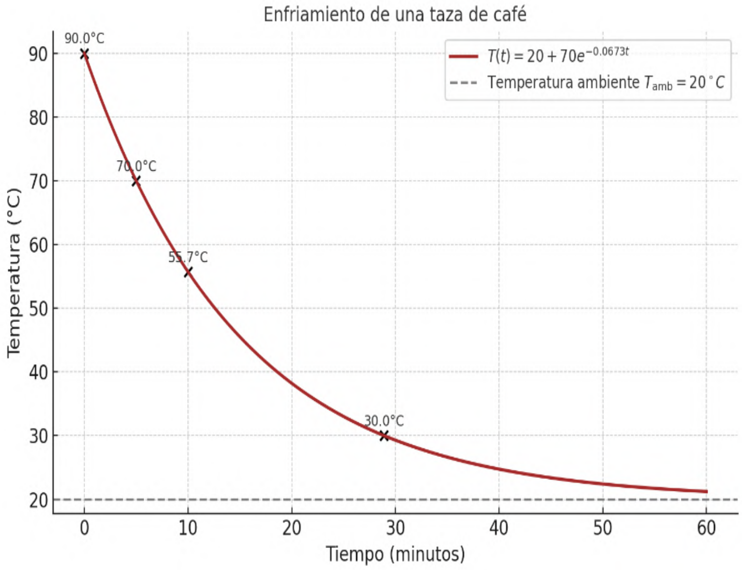
$$T(10) = 20 + 70e^{-0.0673\cdot 10} \approx 55.74°\text{C}$$

c) Tiempo para alcanzar 30°C

$$30 = 20 + 70e^{-0.0673t} \Rightarrow e^{-0.0673t} = \frac{1}{7} \Rightarrow t \approx \frac{\ln(7)}{0.0673} \approx 28.90 \text{ minutos}$$

Gráfica:

Figura 50.
Modelo de enfriamiento de una taza de café.



Nota: Autores (2026).

La curva muestra cómo la temperatura del café disminuye de forma exponencial a medida que transcurre el tiempo, acercándose asintóticamente a la temperatura ambiente (20°C). Se han marcado puntos clave: la temperatura inicial, el valor a los 5 y 10 minutos, y el instante en que se alcanza 30°C. Esta visualización confirma la validez del modelo propuesto y permite estimar el comportamiento térmico del sistema sin resolver nuevamente la ecuación diferencial.

4.5.3. Flujo de entrada-salida

Supongamos que un tanque contiene una solución líquida en la que entra y sale fluido continuamente. La cantidad de sustancia disuelta (por ejemplo, sal o azúcar) cambia con el tiempo dependiendo de las tasas de entrada y salida.

Sea $A(t)$ la cantidad (en gramos, libras, etc.) de sustancia disuelta en el tanque en el instante t. Entonces, la razón de cambio de $A(t)$ se expresa como:

$$\frac{dA}{dt} = R_1 - R_2$$

donde:

- R_1: tasa de entrada de la sustancia (por ejemplo, gramos por minuto),
- R_2: tasa de salida de la sustancia.

Estas tasas dependen del caudal volumétrico de entrada/salida y la concentración correspondiente.

- Sea G_1: caudal volumétrico de entrada (por ejemplo, litros por minuto).
- Sea G_2: caudal volumétrico de salida.
- Sea C_1: concentración del fluido que entra (por ejemplo, g/L).
- Sea C_2: concentración del fluido que sale. Generalmente es igual a la concentración dentro del tanque en ese instante: $C_2(t) = \frac{A(t)}{V(t)}$, donde $V(t)$ es el volumen de líquido en el tanque.

Entonces:

$$R_1 = G_1 \cdot C_1, \qquad R_2 = G_2 \cdot \frac{A(t)}{V(t)}$$

Y la ecuación diferencial general para el sistema queda como:

$$\frac{dA}{dt} = G_1C_1 - G_2 \cdot \frac{A(t)}{V(t)}$$

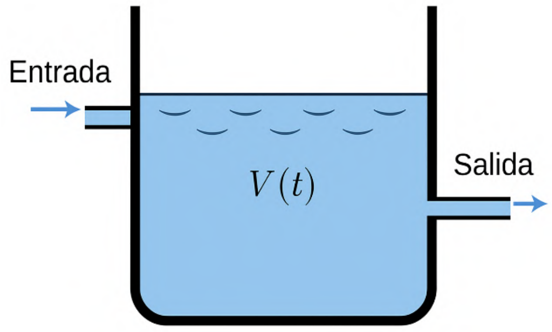
Este modelo se puede resolver con alguno de los métodos vistos anteriormente, dependiendo de si $V(t)$ es constante o no.

Ejemplo: Flujo de entrada-salida

Un tanque contiene inicialmente 100 litros de agua pura. A partir del tiempo $t = 0$, se bombea una solución salina con concentración $C_1 = 0.5$ kg/L a una tasa constante de $G_1 = 5$ L/min. Al mismo tiempo, el líquido perfectamente mezclado sale del tanque a la misma velocidad $G_2 = 5$ L/min, y el volumen en el tanque se mantiene constante $V = 100$ L.

Figura 51.

Tanque con flujo de entrada y salida de líquido azucarado.



Nota: Autores (2026).

Objetivo: Determinar la cantidad de sal en el tanque en el tiempo t, es decir, encontrar $A(t)$. Plantear resolución como ecuación lineal y exacta.

Solución:

a) **Modelar con una ecuación diferencial**

Sea $A(t)$ la cantidad de sal (en kg) en el tanque en el instante t. Aplicamos el modelo:

$$\frac{dA}{dt} = R_1 - R_2$$

donde:

$$R_1 = G_1 C_1 = 5 \cdot 0.5 = 2.5\,\text{kg/min}$$

$$R_2 = G_2 \cdot \frac{A(t)}{V} = 5 \cdot \frac{A(t)}{100} = \frac{A(t)}{20}$$

Entonces:

$$\frac{dA}{dt} = 2.5 - \frac{A(t)}{20}$$

b) **Resolver como ecuación lineal**

Esta es una ecuación lineal de la forma:

$$\frac{dA}{dt} + \frac{1}{20}A = 2.5$$

Factor integrante:

$$\mu(t) = e^{\int \frac{1}{20} dt} = e^{t/20}$$

Multiplicamos toda la ecuación por $\mu(t)$:

$$e^{t/20} \cdot \frac{dA}{dt} + \frac{1}{20} e^{t/20} A = 2.5 e^{t/20}$$

$$\frac{d}{dt}\left(e^{t/20} A\right) = 2.5 e^{t/20}$$

Integramos:

$$e^{t/20} A = \int 2.5 e^{t/20}\, dt = 2.5 \cdot 20 e^{t/20} + C = 50 e^{t/20} + C$$

$$A(t) = 50 + C e^{-t/20}$$

c) Replanteamiento como ecuación exacta

La ecuación diferencial también puede escribirse como:

$$\frac{dA}{dt} + \frac{1}{20} A = 2.5$$

Multiplicando ambos lados por el factor integrante $\mu(t) = e^{t/20}$:

$$e^{t/20} \frac{dA}{dt} + \frac{1}{20} e^{t/20} A = 2.5 e^{t/20} \Rightarrow \frac{d}{dt}(e^{t/20} A) = 2.5 e^{t/20}$$

Lo cual puede verse como una ecuación exacta:

$d\left(e^{t/20} A\right) = 2.5 e^{t/20} dt \Rightarrow$ forma exacta: $d\psi = 0$ con $\psi(t, A) = e^{t/20} A - 50 e^{t/20}$

Entonces:

$$\psi(t, A) = C \Rightarrow e^{t/20} A - 50 e^{t/20} = C \Rightarrow A(t) = 50 + C e^{-t/20}$$

Con $A(0) = 0 \Rightarrow C = -50$, obtenemos la misma solución:

$$A(t) = 50(1 - e^{-t/20})$$

d) Determinar la constante con condición inicial

Dado que el tanque tiene inicialmente agua pura: $A(0) = 0$

$$A(0) = 50 + C \cdot e^{0} = 50 + C = 0 \Rightarrow C = -50$$

Entonces, la solución es:

$$A(t) = 50\left(1 - e^{-t/20}\right)$$

e) Análisis gráfico

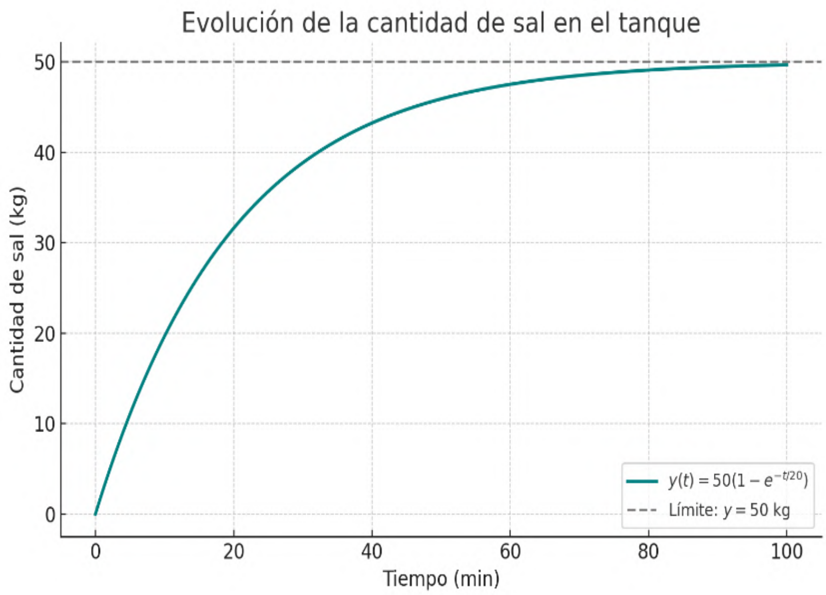
$$\text{Para } t \to \infty, \quad A(t) \to 50\,\text{kg}$$

Esto significa que el tanque se estabiliza con 50 kg de sal, lo cual tiene sentido porque el sistema se alimenta continuamente con una solución que tiene 0.5 kg/L y un volumen fijo de 100 L:

$$\text{Concentración final: } \frac{A(t)}{V} = \frac{50}{100} = 0.5\,\text{kg/L}$$

Figura 52.

Evolución de la cantidad de sal A(t) en el tanque.



Nota: Autores (2026).

La gráfica muestra cómo la cantidad de sal $A(t)$ en el tanque aumenta progresivamente desde cero hasta estabilizarse en un valor límite de 50 kg. Este comportamiento refleja la naturaleza de la ecuación diferencial: al inicio, el tanque contiene agua pura y la entrada de sal domina; sin embargo, a medida que aumenta la cantidad de sal dentro del tanque, la salida también incrementa proporcionalmente, lo que provoca que la velocidad de acumulación disminuya.

El sistema alcanza un estado de equilibrio cuando la tasa de entrada de sal se iguala con la tasa de salida, es decir, cuando:

$$\frac{dA}{dt} = 0 \Rightarrow R_1 = R_2 \Rightarrow 2.5 = \frac{A}{20} \Rightarrow A = 50\,\text{kg}$$

Este resultado confirma lo observado en la gráfica y valida el modelo: el sistema se autorregula hasta alcanzar una concentración igual a la del líquido que entra.

4.5.4.Modelo de circuito eléctrico RC

Un circuito eléctrico está formado por una resistencia R (en ohmios) y un condensador C (en faradios) conectados en serie a una fuente de voltaje $E(t)$. Sea $q(t)$ la carga eléctrica en el condensador en el instante t. Aplicando la Ley de Kirchhoff de voltajes, se tiene:

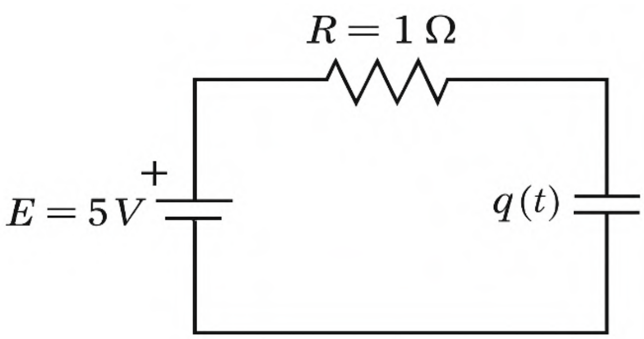
$$E(t) = R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C}$$

Ejemplo: circuito con fuente constante

Sea un circuito con $R = 10\,\Omega$, $C = 0.1\,\text{F}$ y una fuente constante de voltaje $E(t) = 5\,\text{V}$. Inicialmente el condensador está descargado, es decir, $q(0) = 0$.

Figura 53.

Esquema de circuito RC con resistencia y condensador en serie.



Nota: Autores (2026).

Objetivo: Determinar la carga en el condensador en el tiempo t, es decir, encontrar $q(t)$.

Solución paso a paso:

Paso 1: Modelar con una EDO

La ecuación es:

$$5 = 10\frac{dq}{dt} + \frac{q}{0.1} = 10\frac{dq}{dt} + 10q$$

Dividiendo por 10:

$$\frac{dq}{dt} + q = 0.5$$

Paso 2: Resolver como ecuación lineal

$$\frac{dq}{dt} + q = 0.5$$

Factor integrante:

$$\mu(t) = e^{\int 1\,dt} = e^{t}$$

Multiplicamos toda la ecuación por e^{t}:

$$e^{t}\frac{dq}{dt} + e^{t}q = 0.5e^{t} \Rightarrow \frac{d}{dt}(e^{t}q) = 0.5e^{t}$$

Integramos:

$$e^{t}q = \int 0.5e^{t}\,dt = 0.5e^{t} + C \Rightarrow q(t) = 0.5 + Ce^{-t}$$

Paso 3: Aplicar condición inicial

$$q(0) = 0 \Rightarrow 0 = 0.5 + C \Rightarrow C = -0.5$$

Solución particular:

$$q(t) = 0.5(1 - e^{-t})$$

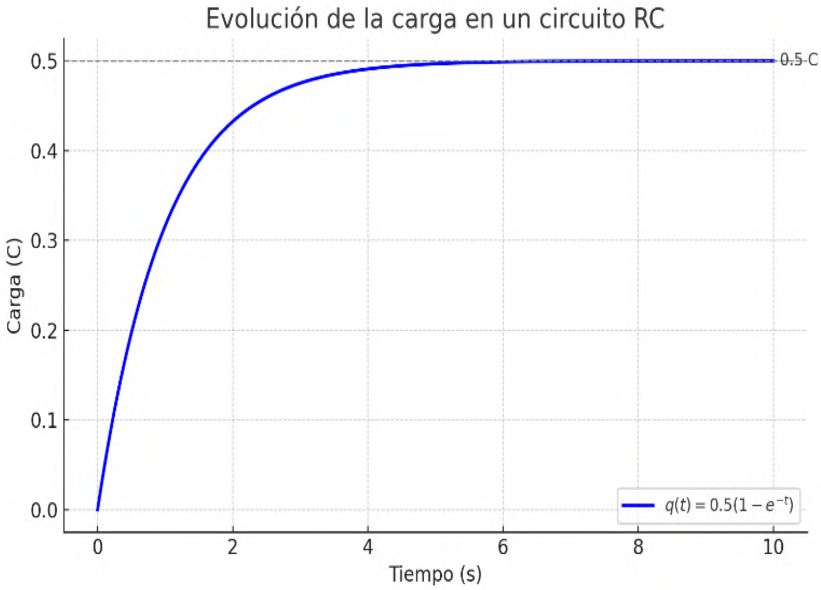
Paso 4: Análisis gráfico

$$\lim_{t\to\infty} q(t) = 0.5\,\mathrm{C}$$

El condensador se carga hasta alcanzar una carga máxima de 0.5 C. La curva es creciente, asintótica, y representa cómo el condensador acumula carga con el tiempo hasta alcanzar el valor de equilibrio.

Figura 54.

Evolución de la carga en el condensador.



Nota: Autores (2026).

La gráfica muestra cómo la carga del condensador, representada por la función $q(t) = 0.5(1 - e^{-t})$, varía con el tiempo en un circuito RC con fuente constante. Este comportamiento se puede interpretar de la siguiente manera:

En el instante inicial $t = 0$, el condensador está descargado, es decir, $q(0) = 0$.

- Conforme pasa el tiempo, el condensador comienza a cargarse rápidamente debido a la diferencia de potencial suministrada por la fuente.
- A medida que el condensador se va cargando, la corriente disminuye gradualmente, ya que la diferencia de potencial entre los extremos del condensador y la fuente se reduce.
- El proceso de carga se desacelera y se aproxima asintóticamente al valor límite de $q = 0.5$ C, el cual corresponde al estado estacionario del sistema.

Este valor de equilibrio coincide con la solución de la ecuación diferencial cuando $\frac{dq}{dt} \to 0$, lo que implica que el flujo de corriente en el circuito tiende a desaparecer y el condensador permanece cargado con la máxima carga posible dada por la fuente:

$$q(\infty) = \frac{EC}{R \cdot 0 + 1} = EC = 5 \cdot 0.1 = 0.5\,\mathrm{C}$$

4.5.5. Modelo de depreciación de capital

En economía, la **depreciación** representa la disminución del valor de un bien (como maquinaria, equipos, vehículos, etc.) debido al uso, desgaste o paso del tiempo.

Uno de los modelos más simples para describir esta pérdida de valor es el modelo de **depreciación exponencial**, el cual se basa en la idea de que la tasa de pérdida de valor es proporcional al valor actual del bien:

$$\frac{dV}{dt} = -kV$$

Donde:

- $V(t)$: valor del bien en el instante t,
- $k > 0$: constante de depreciación.

Ejemplo: depreciación de una máquina

Una máquina nueva cuesta $20,000. Se deprecia a una tasa anual del 10 %. ¿Cuál será su valor al cabo de 5 años? ¿Y en qué momento su valor se reduce a la mitad?

Paso 1: Planteamiento del modelo

$$\frac{dV}{dt} = -0.1V, \quad V(0) = 20000$$

Paso 2: Resolver la EDO

$$\frac{1}{V}\,dV = -0.1\,dt \Rightarrow \ln|V| = -0.1t + C \Rightarrow V(t) = Ce^{-0.1t}$$

Aplicando la condición inicial:

$$V(0) = 20000 \Rightarrow C = 20000 \Rightarrow V(t) = 20000e^{-0.1t}$$

Paso 3: Calcular valor a los 5 años

$$V(5) = 20000e^{-0.5} \approx 20000 \cdot 0.6065 \approx 12130$$

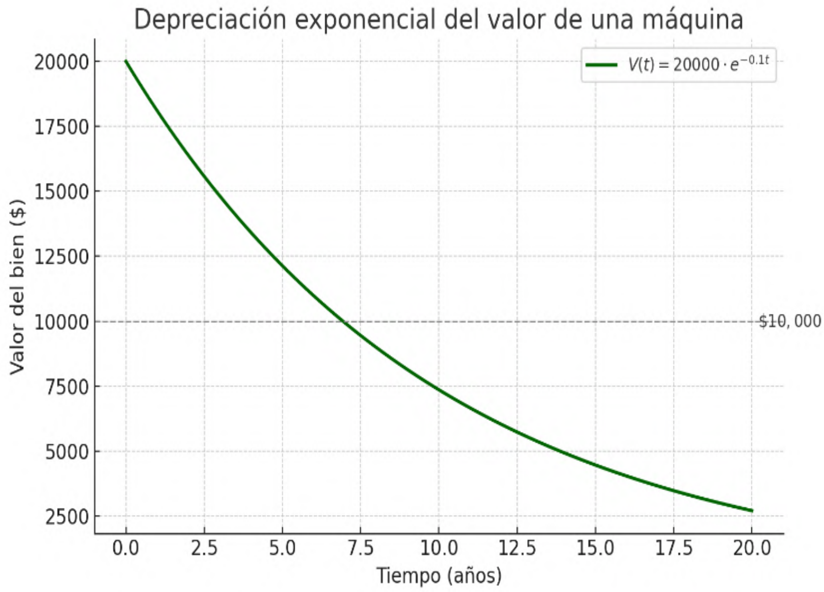
Paso 4: ¿Cuándo se reduce a la mitad?

$$10000 = 20000e^{-0.1t} \Rightarrow \frac{1}{2} = e^{-0.1t} \Rightarrow t = \frac{\ln(2)}{0.1} \approx 6.93 \text{ años}$$

La máquina pierde valor de forma exponencial. En 5 años su valor disminuye a aproximadamente $12,130 y se reduce a la mitad en unos 7 años. Esta información es útil para decisiones de mantenimiento, renovación o venta de activos.

Figura 55.

Depreciación exponencial del valor de una máquina.



Nota: Autores (2026).

4.5.6. Resumen

A lo largo de esta sección se han presentado distintos modelos reales que pueden representarse mediante ecuaciones diferenciales de primer orden. Cada uno de ellos ilustra cómo este tipo de herramientas matemáticas permiten describir, analizar y predecir fenómenos dinámicos en múltiples disciplinas, tales como:

- **Física:** desintegración radiactiva, caída libre con resistencia del aire.
- **Biología:** crecimiento poblacional.
- **Química:** procesos de mezcla en tanques con entradas y salidas.

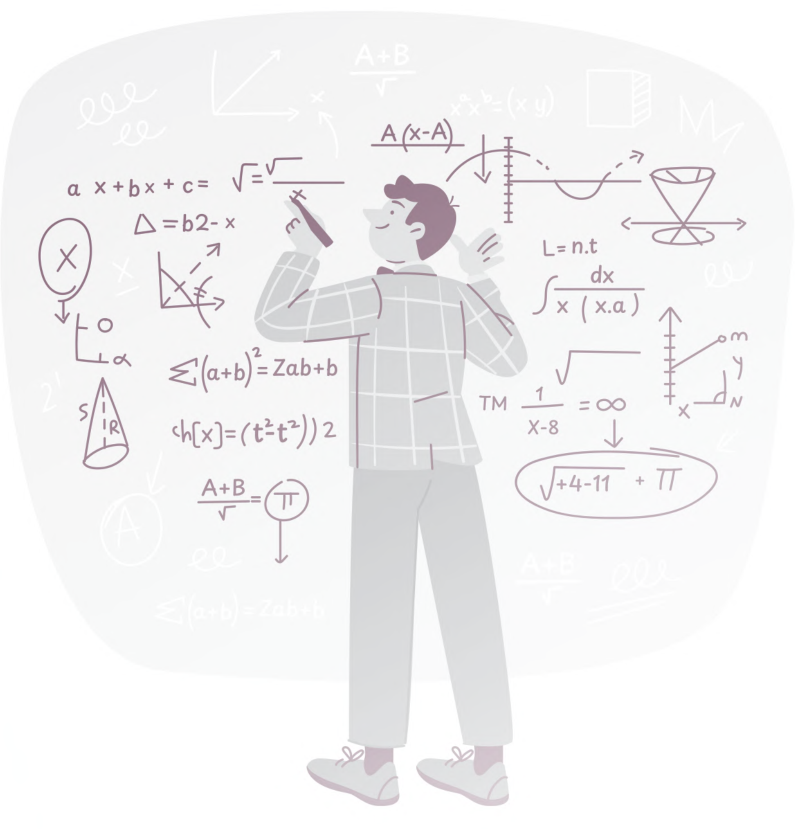
- **Economía:** depreciación de capital.
- **Ingeniería:** circuitos eléctricos con resistencias y condensadores.

A pesar de la variedad de contextos, todos los modelos comparten una estructura común que permite clasificarlos y resolverlos mediante los métodos explicados anteriormente: separación de variables, ecuaciones lineales y ecuaciones exactas.

Esta unidad ha demostrado que las EDOs no son solo una herramienta matemática, sino una vía para traducir problemas reales a un lenguaje que permite comprensión, simulación y toma de decisiones fundamentadas.

El desarrollo de habilidades en modelación es esencial para cualquier profesional que busque entender y actuar sobre sistemas dinámicos en su entorno de especialidad.

Referencias Bibliográficas



Referencias Bibliográficas

Blanchard, P., Devaney, R. L., & Hall, G. R. (2012). *Differential Equations* (4th ed.). Brooks/Cole.

Boyce, W. E., & DiPrima, R. C. (2017). *Ecuaciones Diferenciales y Problemas con Valores en la Frontera* (9.ª ed.). Wiley.

Braun, M. (1993). *Differential Equations and Their Applications: An Introduction to Applied Mathematics* (4th ed.). Springer.

Edwards, C. H., & Penney, D. E. (2015). *Differential Equations and Boundary Value Problems: Computing and Modeling* (5th ed.). Pearson.

Hirsch, M. W., Smale, S., & Devaney, R. L. (2004). *Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos* (2nd ed.). Academic Press.

Kreyszig, E. (2011). *Advanced Engineering Mathematics* (10th ed.). Wiley.

Larson, R., & Edwards, B. H. (2010). *Cálculo* (9.ª ed.). McGraw-Hill.

Leithold, L. (1999). *El Cálculo con Geometría Analítica* (7.ª ed.). Oxford University Press.

Stewart, J. (2013). *Cálculo de una Variable: Trascendentes Tempranas* (7.ª ed.). Cengage Learning.

Tenenbaum, M., & Pollard, H. (1985). *Ecuaciones Diferenciales: Con Aplicaciones y Notas Históricas*. Prentice Hall.

Thomas, G. B., Weir, M. D., & Hass, J. (2009). *Cálculo de Varias Variables* (11.ª ed.). Addison-Wesley.

Zill, D. G. (2018). *Ecuaciones Diferenciales con Problemas con Valores en la Frontera* (10.ª ed.). Cengage Learning.

EDITORIAL GRUPO AEA

RESUMEN

La obra constituye un recurso académico orientado al fortalecimiento de competencias matemáticas avanzadas mediante la articulación entre fundamentos teóricos, procedimientos analíticos, ejercicios resueltos y aplicaciones prácticas. Su contenido se organiza progresivamente desde el estudio de límites, continuidad, derivadas, razones de cambio y análisis de funciones, hasta el tratamiento de integrales definidas e indefinidas, sumas de Riemann, método trapezoidal, áreas, volúmenes y técnicas de integración. Posteriormente, introduce las ecuaciones diferenciales, su clasificación, tipos de solución, problemas con valores iniciales, existencia y unicidad, campos de direcciones y herramientas de visualización computacional. Finalmente, profundiza en ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, abordando variables separables, ecuaciones lineales, exactas y modelos aplicados a fenómenos físicos, económicos y tecnológicos como desintegración radiactiva, enfriamiento de Newton, mezclas, circuitos RC y depreciación. En conjunto, el libro se presenta como una guía didáctica para estudiantes de posgrado, al integrar rigor conceptual, resolución de problemas y modelación de situaciones reales, favoreciendo el pensamiento crítico, la interpretación gráfica y el uso de herramientas matemáticas en contextos científicos e ingenieriles.

Palabras Clave: cálculo diferencial; cálculo integral; ecuaciones diferenciales; modelación matemática; aplicaciones matemáticas.

Abstract

This textbook is an academic resource designed to strengthen advanced mathematical skills by integrating theoretical foundations, analytical procedures, worked examples, and practical applications. Its content is organized progressively, beginning with the study of limits, continuity, derivatives, rates of change, and function analysis, and extending to the treatment of definite and indefinite integrals, Riemann sums, the trapezoidal rule, areas, volumes, and integration techniques. It then introduces differential equations, their classification, types of solutions, initial value problems, existence and uniqueness, fields of directions, and computational visualization tools. Finally, it delves into first-order ordinary differential equations, addressing separable variables, linear and exact equations, and models applied to physical, economic, and technological phenomena such as radioactive decay, Newtonian cooling, mixtures, RC circuits, and depreciation. Overall, the book serves as a didactic guide for graduate students, integrating conceptual rigor, problem-solving, and modeling of real-world situations, thereby fostering critical thinking, graphical interpretation, and the use of mathematical tools in scientific and engineering contexts.

Keywords: differential calculus; integral calculus; differential equations; mathematical modeling; mathematical applications.

http://www.editorialgrupo-aea.com

Editorial Grupo AeA

editorialgrupoaea

Editorial Grupo AEA

ISBN: 978-9942-598-16-5