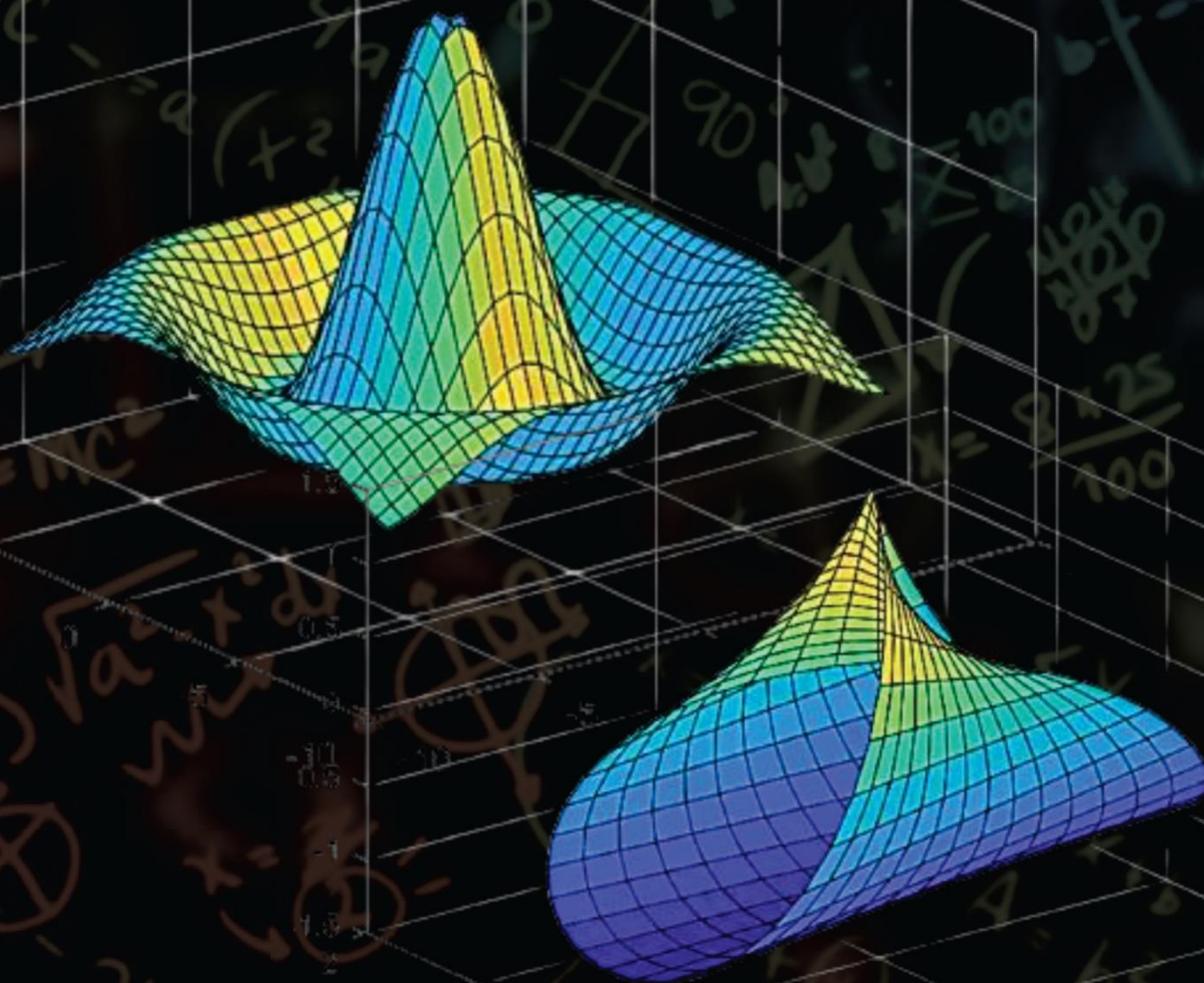


INTRODUCCIÓN AL **CÁLCULO** **VECTORIAL** PARA INGENIERÍA



Cevallos-Muñoz, Omar Arturo



Grupo de Asesoría Empresarial & Académica
Grupopaea.ecuador
Editorial Grupo AEA

Introducción al Cálculo Vectorial para Ingeniería

Autor/es:

Cevallos-Muñoz, Omar Arturo

Universidad Técnica Estatal de Quevedo

Datos de Catalogación Bibliográfica

Cevallos-Muñoz, O. A.

Introducción al Cálculo Vectorial para Ingeniería

Editorial Grupo AEA, Ecuador, 2024

ISBN: 978-9942-651-44-0

Formato: 210 cm X 270 cm

271 págs.



Publicado por Editorial Grupo AEA

Ecuador, Santo Domingo, Vía Quinindé, Urb. Portón del Río.

Contacto: +593 983652447; +593 985244607

Email: info@editorialgrupo-aea.com

<https://www.editorialgrupo-aea.com/>

Director General:	<i>Prof. César Casanova Villalba.</i>
Editor en Jefe:	<i>Prof. Giovanni Herrera Enríquez</i>
Editora Académica:	<i>Prof. Maybelline Jaqueline Herrera Sánchez</i>
Supervisor de Producción:	<i>Prof. José Luis Vera</i>
Diseño:	<i>Tnlgo. Oscar J. Ramírez P.</i>
Consejo Editorial	<i>Editorial Grupo AEA</i>

Primera Edición, 2024

D.R. © 2024 por Autores y Editorial Grupo AEA Ecuador.

Cámara Ecuatoriana del Libro con registro editorial No 708

Disponible para su descarga gratuita en <https://www.editorialgrupo-aea.com/>

Los contenidos de este libro pueden ser descargados, reproducidos difundidos e impresos con fines de estudio, investigación y docencia o para su utilización en productos o servicios no comerciales, siempre que se reconozca adecuadamente a los autores como fuente y titulares de los derechos de propiedad intelectual, sin que ello implique en modo alguno que aprueban las opiniones, productos o servicios resultantes. En el caso de contenidos que indiquen expresamente que proceden de terceros, deberán dirigirse a la fuente original indicada para gestionar los permisos.

Título del libro:

Introducción al Cálculo Vectorial para Ingeniería

© Cevallos Muñoz, Omar Arturo.

© Agosto, 2024

Libro Digital, Primera Edición, 2024

Editado, Diseñado, Diagramado y Publicado por Comité Editorial del Grupo AEA,
Santo Domingo de los Tsáchilas, Ecuador, 2024

ISBN: 978-9942-651-44-0



<https://doi.org/10.55813/egaea.l.89>

Como citar (APA 7ma Edición):

Cevallos-Muñoz, O. A. (2024). *Introducción al Cálculo Vectorial para Ingeniería*.
Editorial Grupo AEA. <https://doi.org/10.55813/egaea.l.89>

Cada uno de los textos de Editorial Grupo AEA han sido sometido a un proceso de evaluación por pares doble ciego externos (double-blindpaperreview) con base en la normativa del editorial.

Revisores:



Lic. Riveros Ancasi Daker, PhD.

Universidad Nacional de
Huancavelica – Perú



Lic. Puyol Cortez Jorge Luis, PhD
(c)

Universidad Técnica Luis Vargas
Torres de Esmeraldas – Ecuador
Universidad Cesar Vallejo – Perú



Los libros publicados por “**Editorial Grupo AEA**” cuentan con varias indexaciones y repositorios internacionales lo que respalda la calidad de las obras. Lo puede revisar en los siguientes apartados:



Editorial Grupo AEA

 <http://www.editorialgrupo-aea.com>

 Editorial Grupo AeA

 editorialgrupoea

 Editorial Grupo AEA

Aviso Legal:

La información presentada, así como el contenido, fotografías, gráficos, cuadros, tablas y referencias de este manuscrito es de exclusiva responsabilidad del/los autor/es y no necesariamente reflejan el pensamiento de la Editorial Grupo AEA.

Derechos de autor ©

Este documento se publica bajo los términos y condiciones de la licencia Creative Commons Reconocimiento-NoComercial-CompartirIgual 4.0 Internacional (CC BY-NC-SA 4.0).



El “copyright” y todos los derechos de propiedad intelectual y/o industrial sobre el contenido de esta edición son propiedad de la Editorial Grupo AEA y sus Autores. Se prohíbe rigurosamente, bajo las sanciones en las leyes, la producción o almacenamiento total y/o parcial de esta obra, ni su tratamiento informático de la presente publicación, incluyendo el diseño de la portada, así como la transmisión de la misma de ninguna forma o por cualquier medio, tanto si es electrónico, como químico, mecánico, óptico, de grabación o bien de fotocopia, sin la autorización de los titulares del copyright, salvo cuando se realice confines académicos o científicos y estrictamente no comerciales y gratuitos, debiendo citar en todo caso a la editorial. Las opiniones expresadas en los capítulos son responsabilidad de los autores.

RESEÑA DE AUTORES

AUTORES



Cevallos Muñoz Omar Arturo



Universidad Técnica Estatal de Quevedo



ocevallos@uteq.edu.ec



<https://orcid.org/0000-0002-6926-4384>



Ingeniero Naval, Escuela Superior Politécnica del Litoral (1989); Máster en Proyectos de Inversión; Universidad Politécnica de Catalunya (2010); Máster en Investigación Matemática Universidad Técnica de Manabí (2022); Docente titular en la Universidad Técnica Estatal de Quevedo (1995) hasta la actualidad, en las asignaturas de: Algebra Lineal, Cálculo Diferencial, Cálculo Integral, Ecuaciones Diferenciales, Métodos Numéricos, Formulación y Evaluación de Proyectos, Mecánica de Fluidos.

Índice

Reseña de Autores	IX
Índice	XI
Índice de Tablas.....	XIV
Índice de Figuras	XIV
Introducción	XIX
Capítulo I: Geometría del plano y en el espacio	1
1.1. Introducción	4
1.2. Sistema de coordenadas cartesianas y vectores en el espacio	4
1.2.1. Sistema de coordenada cartesiana tridimensional.....	4
1.2.2. Módulo de un vector y su normalización.....	6
1.2.3. Producto punto o producto escalar	9
1.2.4. Producto vectorial.....	12
1.2.5. Triple producto escalar	14
1.3. Rectas y planos en \mathbb{R}^3	16
1.3.1. Rectas en \mathbb{R}^3	16
1.3.2. Planos en \mathbb{R}^3	17
1.3.3. Ángulo entre planos	20
1.3.4. Trazado de planos en \mathbb{R}^3	22
1.3.5. Distancias entre puntos, planos y rectas	23
1.4. Superficies en el espacio	25
1.4.1. Superficies cuádricas	25
1.5. Sistemas de coordenadas.....	32
1.5.1. Coordenadas cilíndricas	33
1.5.2. Coordenadas esféricas.....	35
1.6. Problemas propuestos	38

Capítulo II: Funciones vectoriales de un parámetro	43
2.1. Introducción	46
2.2. Ecuaciones paramétricas y funciones vectoriales de un parámetro ..	46
2.2.1. Curvas paramétricas	46
2.3. Límites y derivadas de funciones vectoriales	54
2.3.1. Funciones vectoriales.....	54
2.3.2. Límite y continuidad de una función vectorial	57
2.4. Derivadas de una función vectorial de un parámetro	60
2.4.1. Interpretación geométrica de la derivada de una función vectorial	60
2.4.2. Teorema para el cálculo de $r'(t)$	60
2.5. Reglas de derivación entre funciones vectoriales	62
2.5.1. Aplicaciones de la derivada de funciones vectoriales	65
2.6. Integral de una función vectorial de un parámetro.....	70
2.7. Características en las curvas de funciones vectoriales de un parámetro	72
2.7.1. Conversión de ecuaciones de una curva en el plano.....	74
2.7.2. Definición de tipos de curvas.....	76
2.7.3. Longitud de una curva parametrizada	78
2.8. Vectores unitarios: Tangente, Normal principal y Binormal de un	80
parámetro.....	80
2.9. Vector Curvatura y Curvatura.....	82
2.10. Planos: Osculador, Normal y Rectificante	85
2.11. Problemas propuestos	87
Capítulo III: Funciones de varias variables	95
3.1. Introducción	98
3.2. Funciones escalares de varias variables.....	98
3.2.1. Límites de funciones de varias variables	100

3.2.2.	Continuidad de funciones de varias variables.....	103
3.2.3.	Derivadas Parciales	104
3.3.	Incrementos y diferenciales	107
3.3.1.	Regla de la cadena en el Diferencial Total	109
3.3.2.	Derivada parcial implícita	112
3.4.	Gradiente.....	113
3.4.1.	Derivadas direccionales	114
3.4.2.	Multiplicadores de Lagrange.....	117
3.5.	Divergencia.....	118
3.6.	Rotacional.....	120
3.6.1.	Fórmulas que involucran al operador ∇	121
3.7.	Problemas propuestos	131
Capítulo IV: Integral múltiple de funciones multivariables.....		141
4.1.	Introducción	144
4.2.	Integrales múltiples sobre regiones rectangulares	144
4.2.1.	Integrales dobles	144
4.2.2.	Integrales iteradas y el Teorema de Fubini.....	148
4.2.3.	Aplicaciones de los integrales dobles	151
4.2.4.	Cálculo de integrales dobles impropias	152
4.3.	Integrales dobles en coordenadas polares.....	154
4.3.1.	Regiones de integración en rectángulos polares	154
4.3.2.	Regiones polares generales de integración.....	156
4.4.	Integrales triples.....	159
4.4.1.	Integrales triples sobre una región acotada general	159
4.4.2.	Integrales triples en coordenadas cilíndricas	162
4.4.3.	Integrales triples en coordenadas esféricas.....	166
4.5.	Aplicaciones de la integral múltiple	170

4.6.	Cambio de variables en integrales múltiples	179
4.6.1.	Cambio de variables para integrales triples	183
4.7.	Problemas propuestos	186
Capítulo V: Integración vectorial.....		193
5.1.	Introducción	196
5.2.	Integrales de funciones vectoriales	196
5.2.1.	Integrales de línea.....	198
5.2.2.	Campos conservativos	201
5.3.	Integrales de superficie	207
5.4.	Integrales de volumen.....	213
5.5.	El Teorema de la Divergencia o Teorema de Gauss.....	217
5.6.	El Teorema de Stokes	221
5.7.	El Teorema de Green	223
5.7.1.	Teoremas integrales relacionados al Teorema de Green	224
5.8.	Problemas propuestos	231
Capítulo VI: Anexos		237
Referencias Bibliográficas.....		247

Índice de Tablas

Tabla 1	<i>Variable dependiente, intermedia e independiente</i>	109
Tabla 2	<i>Información sobre las ecuaciones para las regiones D y G.....</i>	184

Índice de Figuras

Figura 1	<i>Ejes cartesianos y planos coordenados en el espacio.....</i>	5
Figura 2	<i>Representación de los puntos A y B en el espacio</i>	5
Figura 3	<i>Ángulos directores del vector</i>	7
Figura 4	<i>Representación del vector posición.....</i>	7
Figura 5	<i>Representación gráfica de $r_1 + r_2$</i>	8

Figura 6 Representación geométrica en el plano de $A \cdot B$	9
Figura 7 Ángulo entre r_1 y r_2	11
Figura 8 Momento de una fuerza.....	13
Figura 9 Momento de una fuerza.....	14
Figura 10 Volumen generado por el producto mixto A , B y C	15
Figura 11 Ecuación vectorial del plano.....	18
Figura 12 Ecuación del plano	20
Figura 13 Ángulo entre planos	21
Figura 14 Trazas del plano $4x + 3y + 2z = 12$	22
Figura 15 Trazas de los planos	23
Figura 16 Principales superficies cuádricas.....	25
Figura 17 Principales superficies cuádricas.....	26
Figura 18 Principales superficies cuádricas.....	27
Figura 19 Principales superficies cuádricas.....	27
Figura 20 Principales superficies cuádricas.....	28
Figura 21 Principales superficies cuádricas.....	29
Figura 22 Cono elíptico	30
Figura 23 Hiperboloide	31
Figura 24 a. Cilindro circular $x^2 + y^2 = 1$	32
Figura 25 b. Cilindro parabólico $y = x^2$	32
Figura 26 Representación de un sistema en coordenada cilíndrica.....	33
Figura 27 Planos paralelos.....	34
Figura 28 Cilindro.....	34
Figura 29 Conversión coordenadas.....	35
Figura 30 Representación de un sistema en coordenadas esféricas.....	36
Figura 31 Conversión coordenadas.....	37
Figura 32 Parámetro t	47
Figura 33 Si el parámetro t varía en $[a, b]$, el punto final del vector $r(t)$ genera una curva en el espacio	48
Figura 34 Curva paramétrica de $r(t) = 3\cos(t)i + 3\sin(t)j, 0 \leq t \leq 2\pi$...	50
Figura 35 Recta orientada que va desde A hasta B	50
Figura 36 Segmento orientado que va desde P_0 hasta P_1	51
Figura 37 Hélice circular de eje z , radio 3 y paso 2π	52
Figura 38 Intersección entre un cilindro circular y un plano oblicuo.....	52

Figura 39	<i>Intersección entre un cilindro circular y una superficie parabólica ..</i>	53
Figura 40	<i>Intersección entre un cilindro circular y una superficie parabólica ..</i>	54
Figura 41	<i>Rango de la función $f(t) = (2 + t, t^2 + 1)$</i>	56
Figura 42	<i>Dominio, rango y gráfica de la función $z = 16 - 4x^2 - y^2$</i>	57
Figura 43	<i>Interpretación geométrica de la derivada de una función.....</i>	60
Figura 44	<i>Hélice circular de eje z, radio 1 y paso 2π.....</i>	62
Figura 45	<i>Movimiento de una partícula.....</i>	66
Figura 46	<i>Movimiento bidimensional</i>	68
Figura 47	<i>Movimiento bidimensional</i>	70
Figura 48	<i>Forma paramétrica de la elipse</i>	73
Figura 49	<i>Hélice elíptica parametrizada</i>	74
Figura 50	<i>Parábola parametrizada</i>	75
Figura 51	<i>Circunferencia parametrizada.....</i>	76
Figura 52	<i>Tipos de líneas curvas.....</i>	76
Figura 53	<i>Tipos de curvas geométricas.....</i>	77
Figura 54	<i>Curva seccionalmente suave (suave por tramos)</i>	77
Figura 55	<i>Aproximación poligonal de C.....</i>	78
Figura 56	<i>Vector tangente unitario</i>	80
Figura 57	<i>Vector normal.....</i>	81
Figura 58	<i>Vector binormal unitario.....</i>	82
Figura 59	<i>Curvatura función parametrizada</i>	83
Figura 60	<i>Triedro de Frenet – Serret.....</i>	85
Figura 61	<i>Problema 3 a, b, c, d</i>	92
Figura 62	<i>$P(x_0, y_0), f(x_0, y_0)$ y las trazas $paray = y_0$ y $parax = x_0$</i>	105
Figura 63	<i>Transformación entre coordenadas</i>	128
Figura 64	<i>Región que define una integral doble</i>	145
Figura 65	<i>Integral doble sobre una región</i>	147
Figura 66	<i>Área de la corona circular.....</i>	154
Figura 67	<i>Integral doble mediante coordenada polar</i>	157
Figura 68	<i>Volumen mediante coordenada polar.....</i>	158
Figura 69	<i>Volumen mediante coordenada polar.....</i>	159
Figura 70	<i>Volumen mediante coordenada polar.....</i>	164
Figura 71	<i>Volumen mediante coordenada polar.....</i>	165
Figura 72	<i>Aplicación integral múltiple: área entre curvas.....</i>	170

Figura 73 Centro de masa de una placa.....	171
Figura 74 Centro de masa de una placa.....	172
Figura 75 La transformación de una región G en el plano uv en una región R en el plano xy	179
Figura 76 Área mediante transformación de coordenadas	181
Figura 77 Área de región por transformación	183
Figura 78 Volumen mediante transformación de coordenadas.....	185
Figura 79 Integral de superficie	207
Figura 80 Integral de superficie	209
Figura 81 Integral de superficie	210
Figura 82 Integral de superficie	211
Figura 83 Integral de superficie	212
Figura 84 Integral de volumen.....	214
Figura 85 Integral de volumen.....	215
Figura 86 Teorema de la divergencia	218
Figura 87 Teorema de Green	225
Figura 88 Teorema de Green	226
Figura 89 Teorema de Green	227
Figura 90 Teorema de Green	228
Figura 91 Teorema de Green	229
Figura 92 Teorema de Green	231

Introducción

La presente obra corresponde a un texto guía para el curso de **Cálculo Vectorial** para los estudiantes de las carreras de ingeniería de la Universidad Técnica Estatal de Quevedo. Como prerrequisitos para estudiar los temas de este libro son necesarios un curso básico en Álgebra Lineal y los cursos introductorios al Cálculo Diferencial e Integral de una variable.

El objetivo principal del libro es acompañar al estudiante a entender de manera simplificada y efectiva cuál es el corazón de cada tema del curso. Está escrito de manera corta; sin embargo, contiene los temas suficientes para comprender el curso, en particular incluye las definiciones más elementales del análisis con funciones escalares y vectoriales de varias variables. Los ejemplos representan los patrones en que los estudiantes deben responder a un ejercicio o situación problemática.

La estructura del libro está adaptada a un semestre académico, y, cada unidad tiene una lista de ejercicios recomendados que significa una colección mínima de ejercicios necesarios para entender el tema, selección de problemas resueltos y propuestos que va de autores clásicos hasta los de aquellos que consideran la inclusión de la tecnología como una herramienta imprescindible para mejorar el proceso de aprendizaje.

En la primera unidad se explora aspectos conceptuales referidos a representar puntos y vectores en el espacio tridimensional, el producto punto y cruz entre vectores y sus aplicaciones en geometría y física; las ecuaciones de rectas y planos en el espacio tridimensional, así como sus intersecciones; calcular las distancias entre puntos, planos y rectas en el espacio; estudiar diferentes tipos de superficies en el espacio tridimensional, como cilindros, conos, y cuádricas en general; y, conversión entre coordenadas rectangulares, cilíndricas y esféricas.

En la segunda unidad, se estudiará las ecuaciones paramétricas y las funciones vectoriales de un parámetro, donde, las ecuaciones paramétricas son una forma de representar una curva en el espacio mediante dos o más funciones de un solo

parámetro, mientras que, las funciones vectoriales de un parámetro son funciones que asocian un vector a cada valor del parámetro. Por otra parte, los campos vectoriales se utilizan para modelar una gran variedad de fenómenos físicos, como la velocidad de un fluido, el campo eléctrico y el campo magnético, entre otros.

La tercera unidad desarrolla los conceptos básicos sobre las funciones escalares de varias variables, que son funciones que dependen de dos o más variables independientes, calcular sus límites y derivadas parciales e interpretarlas como tasas de cambio; calcular la derivada de una función compuesta de dos funciones vectoriales; encontrar los puntos máximos y mínimos de una función sujeta a restricciones mediante los multiplicadores de Lagrange; emplear los operadores vectoriales divergencia y el rotacional para caracterizar los campos vectoriales, etc.

La cuarta unidad presenta el estudio sobre el cálculo integral múltiple, donde se abordan las herramientas y técnicas para calcular el volumen, la superficie y otras propiedades de regiones en el espacio, así como para evaluar el flujo de campos vectoriales a través de superficies; utilizar las coordenadas cilíndricas y esféricas para simplificar el cálculo de integrales triples sobre regiones con simetría axial o radial; aplicar las integrales triples para calcular volúmenes, momentos de inercia y centros de masa de sólidos tridimensionales entre otros temas.

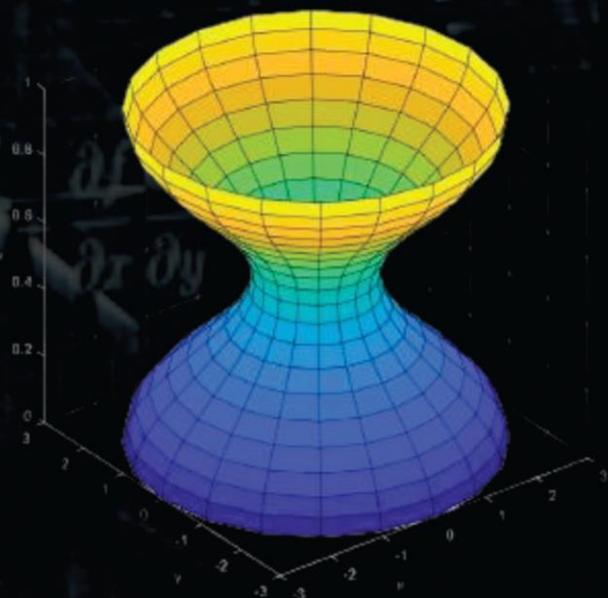
En la quinta unidad se estudia el cálculo de los diferentes tipos de integrales vectoriales, como las integrales de línea, superficie y volumen, y a utilizarlas para estudiar el comportamiento de campos vectoriales en el espacio; se analizan los teoremas fundamentales del cálculo integral vectorial, como el Teorema de la Divergencia (Teorema de Gauss), el Teorema de Stokes y el Teorema de Green, y, finalmente como aplicar estos teoremas para convertir integrales de línea en integrales de superficie, integrales de superficie en integrales de volumen y viceversa.

Espero de los amables lectores todas las sugerencias que permitan mejorar esta obra y permitir que la misma sea útil en su carrera universitaria.

El autor.

CAPITULO 01

GEOMETRÍA DEL PLANO Y EN EL ESPACIO



Geometría del plano y en el espacio

Los elementos fundamentales del análisis vectorial son los vectores y los escalares. Se emplea la notación \mathbb{R} para denotar la recta numérica que se asocia con el conjunto de números reales, \mathbb{R}^2 para denotar el plano cartesiano y \mathbb{R}^3 para el espacio ordinario en tres dimensiones. En la presente unidad se introducen y repasan brevemente conceptos de cursos previos sobre vectores en dos y tres dimensiones, así como la representación espacial de objetos geométricos como líneas, superficies y volúmenes con objeto de sentar las bases para los futuros temas como el estudio de la geometría para el diseño y la construcción de estructuras, máquinas, diseño de aeronaves, trayectoria orbital de un cuerpo, modelación 3D de objetos, prótesis para paciente, sistemas biológicos, sistema de tratamiento de agua, sistema de tratamiento de residuos, entre otras aplicaciones. En resumen, ofrece una amplia gama de aplicaciones prácticas, desarrolla habilidades transversales valiosas y abre oportunidades en otras áreas de las ciencias teóricas y aplicadas.

El objetivo general del presente capítulo es fundamentar el concepto de espacio vectorial tridimensional, resaltando sus propiedades y resultados importantes que luego serán usados en temas específicos posteriores.

Prerrequisitos para abordar este tema

La base teórica necesaria para el estudio de este capítulo es la siguiente:

- Definir la tipología de objetos matemáticos en el plano cartesiano.
- Calcular la distancia en dos dimensiones entre puntos, punto a una recta y entre rectas.
- Aplicar los conceptos y leyes fundamentales del cálculo vectorial en \mathbb{R}^2 .
- Determinar las ecuaciones de rectas y ángulos entre rectas.

Se recomienda buscar información para iniciar y orientar los repasos antes de abordar cada tema.

1.1. Introducción

En este primer capítulo se exponen los preliminares necesarios para tratar adecuadamente el estudio del cálculo para funciones de varias variables cuyo dominio y rango es el espacio n -dimensional o \mathbb{R}^n . Básicamente el contenido aquí tratado corresponde a un material de repaso de otras asignaturas ya vistas por el estudiante y cuyo conocimiento es importante para una mejor comprensión sobre el sistema de coordenadas cartesianas y los vectores como herramientas matemáticas fundamentales para describir la posición y el movimiento de objetos en el espacio, donde su campo de aplicación permite analizar el movimiento, las fuerzas, los fenómenos de las ciencias físicas y de las ingenierías.

1.2. Sistema de coordenadas cartesianas y vectores en el espacio

Cuando se estudia una realidad física (por ejemplo, un mineral o la molécula de ADN, un líquido en una pipeta o sangre fluyendo en una arteria, la energía liberada en cierta reacción química, entre otros casos), nos interesa describir las propiedades (características del objeto, como la masa o la viscosidad) y/o su estado (situación en la que se encuentra, como la temperatura o la velocidad).

Las propiedades y los estados se representan a través de magnitudes que se pueden medir, tal es el caso de magnitudes como la masa, la viscosidad, la presión, etc., las cuales son llamadas magnitudes escalares que constan de un número real (un escalar) y una unidad de medida, mientras que otras requieren de una dirección y orientación como es el caso del desplazamiento, la velocidad, la fuerza, etc., estas son llamadas magnitudes vectoriales o vectores.

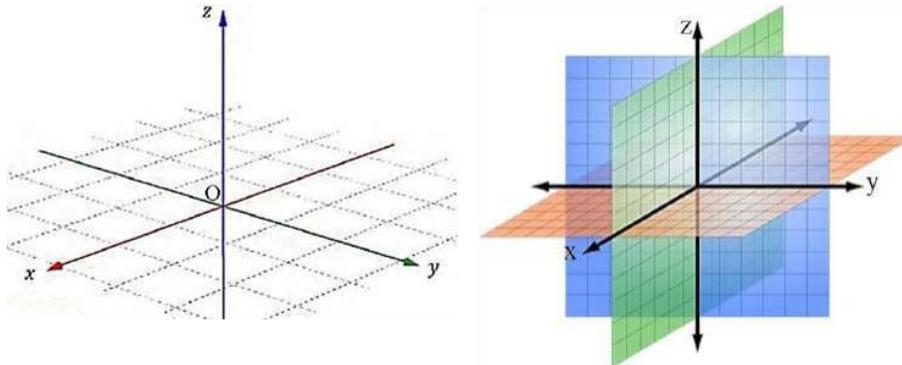
1.2.1. Sistema de coordenada cartesiana tridimensional

En la ingeniería es importante saber operar matemáticamente con vectores, para lo cual primero se debe plantear un sistema cartesiano de coordenadas, que sirve como referencia para ubicar la posición de un objeto o idea y para ver el cambio relativo de su posición. El Sistema de coordenadas cartesianas puede estar circunscrito a dos y tres dimensiones (siendo este último de interés), este

consta de un origen de coordenadas O, y tres rectas o ejes coordenados x, y y z que pasan por O y son perpendiculares entre sí; los semiejes positivos se orientan de acuerdo con la regla de la mano derecha (o sentido de avance de un tornillo), quedando así determinados tres planos coordenados: xy, yz y xz; y el espacio queda dividido en ocho octantes (ver Figura 1).

Figura 1

Ejes cartesianos y planos coordenados en el espacio



Nota: Autor (2024)

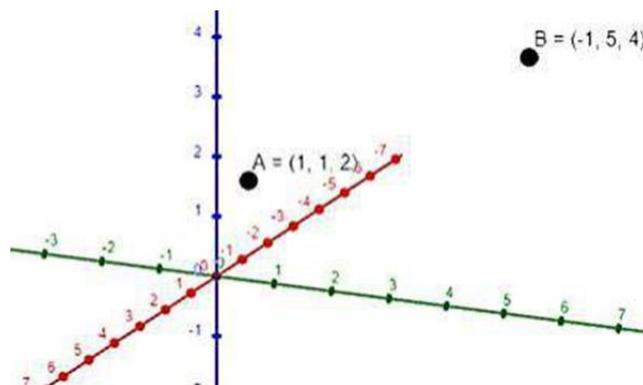
Además, un punto en el espacio se representa por $P(x,y,z)$ o por la terna ordenada (x,y,z) , donde los números reales x, y y z se llaman coordenadas cartesianas del punto P. Se designa con \mathbb{R}^3 al conjunto de todas las ternas ordenadas de números reales, que se corresponden con todos los puntos del espacio, es decir:

$$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) / -\infty < x < \infty, -\infty < y < \infty, -\infty < z < \infty, \}$$

A manera de ejemplo, se desea representar los puntos $A(1,1,2)$, $B(-1,5,4) \in \mathbb{R}^3$

Figura 2

Representación de los puntos A y B en el espacio



Nota: Autor (2024)

1.2.2. Módulo de un vector y su normalización

Como se manifestó, un vector tiene una longitud y una dirección, al establecer un sistema de coordenadas cartesianas y colocamos la cola de un vector en el origen, entonces la cabeza de flecha apunta a un punto específico. Por ejemplo, si el vector A tiene un extremo que apunta a (A_1, A_2, A_3) , decimos que la componente x de A es A_1 , la componente y de A es A_2 , y la componente z de A es A_3 . La longitud del vector A , representado por $|A|$, es un escalar y es independiente de la orientación del sistema de coordenadas. La aplicación del teorema de Pitágoras en tres dimensiones proporciona el resultado:

$$\|A\| = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}$$

Definiendo los vectores unitarios estándar i , j y k como vectores de longitud uno que apuntan a lo largo de las direcciones positivas de los ejes de coordenadas x , y y z , respectivamente, un vector puede ser denotado por:

$$A = A_1i + A_2j + A_3k$$

Los vectores A_1i , A_2j y A_3k se llaman vectores componentes de A en las direcciones x , y y z , y los escalares A_1 , A_2 y A_3 se las componentes de A en las direcciones x , y y z , respectivamente. El módulo de un vector es un número real, mayor o igual que cero, además, si un vector A presenta la característica: $\|A\|=0$, vector nulo, $\|A\|=1$, vector unitario respectivamente. La normalización de un vector es una operación que permite construir un nuevo vector con la misma dirección y sentido, pero de módulo igual a 1. La normalización del vector $A \neq 0$ está dada por,

$$A_u = \frac{A}{\|A\|} = \left(\frac{A_1}{\sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}}, \frac{A_2}{\sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}}, \frac{A_3}{\sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}} \right)$$

Además, sea $B = B_1i + B_2j + B_3k$ también, la suma vectorial y la multiplicación escalar se pueden expresar por componentes y vienen dadas por:

$$A + B = (A_1 + B_1)i + (A_2 + B_2)j + (A_3 + B_3)k;$$

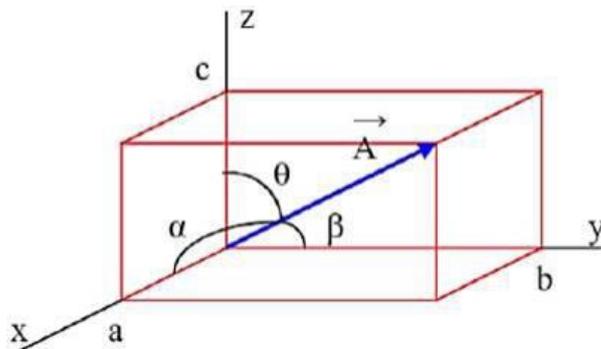
$$cA = cA_1i + cA_2j + cA_3k$$

Suele ser muy útil, la relación entre las componentes y el módulo de un vector generando el concepto de los cosenos directores, es decir, dado el vector $A = A_1i + A_2j + A_3k$, entonces se tiene por definición de cosenos directores (figura 3).

$$\cos \alpha = \frac{A_1}{\|A\|}; \cos \beta = \frac{A_2}{\|A\|}; \cos \theta = \frac{A_3}{\|A\|}; \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \theta = 1$$

Figura 3

Ángulos directores del vector

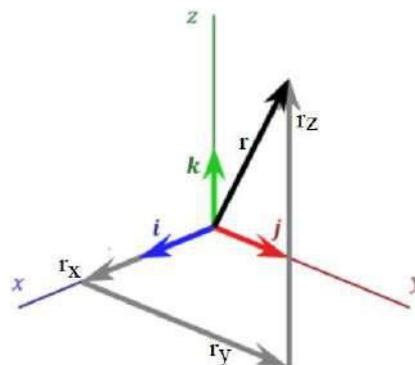


Nota: Autor (2024)

Otro concepto vectorial es el vector de posición, r , se define como el vector que apunta desde el origen $O(x, y, z)$ hasta el punto $P(x, y, z)$ y se usa para ubicar un punto específico en el espacio. Se puede escribir en términos de los vectores unitarios estándar como sigue: $r = xi + yj + zk$, mientras que el vector de desplazamiento es la diferencia entre dos vectores de posición. Para los vectores de posición r_1 y r_2 , el vector de desplazamiento que apunta desde la cabeza de r_1 a la cabeza de r_2 está dado por: $r_2 - r_1 = (x_2 - x_1)i + (y_2 - y_1)j + (z_2 - z_1)k$

Figura 4

Representación del vector posición



Nota: Autor (2024)

Ejemplo 1.1. Suponga que $A = 3i + 5j - 2k$ y $B = 4i - 8j + 7k$, se pide determinar: a. $A + B$; b. $3A - 2B$; c. $\|3A - 2B\|$

Solución

Para encontrar $A + B$, se suman las componentes respectivas, o sea.

a. $A + B = (3 + 4)i + (5 - 8)j + (-2 + 7)k = 7i - 3j + 5k$

b. En el caso de $3A - 2B$, se resuelve $3A = 3(3i + 5j - 2k) = 9i + 15j - 6k$, de manera similar $2B = 2(4i - 8j + 7k) = 8i - 16j + 7k$, y después se suma, o sea, $3A - 2B = (9i + 15j - 6k) - (8i - 16j + 7k) = i + 31j - 20k$

c. $\|3A - 2B\| = \sqrt{1^2 + 31^2 + (-20)^2} = \sqrt{1362} = 36.9$

Ejemplo 1.2. Considere los puntos $P(2,4,3)$ y $Q(1,-5,2)$ en \mathbb{R}^3 como se aprecia en la figura. Se pide determinar: a) Los vectores de posición r_1 y r_2 para P y Q en términos de los vectores unitarios i, j y k. b) La resultante de estos vectores de posición de manera gráfica y analítica.

Solución

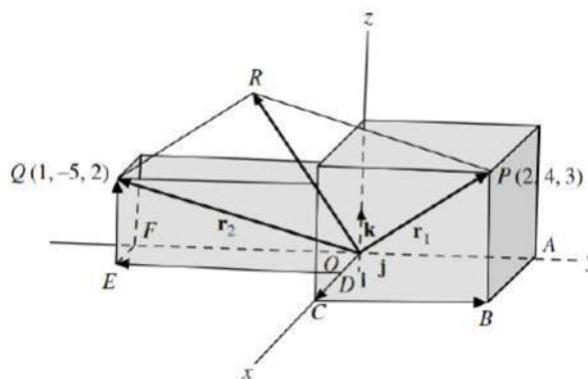
Para el caso (a), se tiene, $r_1 = OP = OC + CB + BP = 2i + 4j + 3k$

Para el caso (b), se tiene, $r_2 = OQ = OD + DE + EQ = i - 5j + 2k$

$r = r_1 + r_2 = (2i + 4j + 3k) + (i - 5j + 2k) = 3i - j + 5k$, cuya grafica es,

Figura 5

Representación gráfica de $r_1 + r_2$



Nota: Autor (2024)

Ejemplo 1.3. Dados los vectores $r_1 = 2i - 4j - 5k$ y $r_2 = -i - 2j + 3k$. Encontrar un vector unitario r_u paralelo a la resultante r de la operación vectorial $r_1 - r_2$.

Solución

La resultante de $r_1 - r_2$, corresponde a,

$$r = r_1 - r_2 = (2i - 4j - 5k) - (-i - 2j + 3k) = 3i - 2j - 8k$$

Donde la magnitud de $r = 3i - 2j - 8k$, equivale a,

$$\|r\| = \sqrt{3^2 + (-2)^2 + (-8)^2} = \sqrt{77}$$

Luego, el vector unitario correspondiente es, $r_u = \frac{r}{\|r\|} = \frac{1}{\sqrt{77}}(3i - 2j - 8k)$

1.2.3.Producto punto o producto escalar

Dados los vectores, $A = A_1i + A_2j + A_3k$ y $B = B_1i + B_2j + B_3k$, el producto punto puede definirse como sigue: $A \cdot B = A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3$, pudiéndose comprobar que el producto punto es conmutativo, distributivo respectivo a la adición y asociativo respecto a la multiplicación con un escalar por tanto se tendrá,

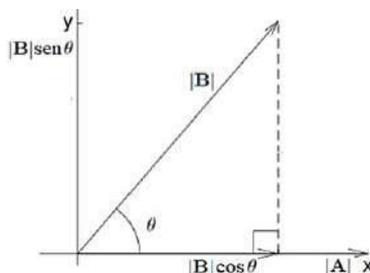
$$A \cdot B = B \cdot A; A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C; A \cdot (cB) = (cA) \cdot B = c(A \cdot B)$$

La operación producto escalar en el plano puede ser representada de manera geométrica como la proyección del vector B sobre el vector A para lo cual se ubican los vectores inicio de A con inicio de B en un sistema de coordenadas y tomando A paralelo al eje x y B sobre el plano x-y formando un ángulo θ (figura 6), entonces, se tiene:

$$A = A_1i, y B = B_1i + B_2j = \|B\|\cos\theta i + \|B\|\sen\theta j, \text{ o sea, } A \cdot B = \|A\|\|B\|\cos\theta$$

Figura 6

Representación geométrica en el plano de $A \cdot B$



Nota: Autor (2024)

Para el caso del producto punto en el espacio se sigue un análisis similar, es decir, dados los vectores, $A = A_1i + A_2j + A_3k$ y $B = B_1i + B_2j + B_3k$, se sigue:

$A \cdot B = A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3$, entonces,

$$\theta = \frac{A \cdot B}{\|A\|\|B\|} = \frac{A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3}{\sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2} \sqrt{B_1^2 + B_2^2 + B_3^2}}$$

Los versores fundamentales, tanto en \mathbb{R}^2 como en \mathbb{R}^3 , cumplen que:

$$i \cdot i = j \cdot j = k \cdot k = 1; i \cdot j = j \cdot k = k \cdot i = 0$$

Además, si se tienen dos vectores de módulos $\|A\|$ y $\|B\|$, pero se desconoce la orientación relativa entre ellos, el producto escalar entre los vectores $A \cdot B$ no puede ser mayor que la cantidad $\|A\|\|B\|$ (lo que se da cuando los vectores son colineales y de igual sentido, osea, $\theta = 0$, entonces, $\cos\theta = 1$). Por otro lado, el producto escalar $A \cdot B$ no puede ser menor que la cantidad $-\|A\|\|B\|$ (esto ocurre cuando los vectores son colineales, pero con sentidos opuestos, $\cos\theta = -1$). Esta importante propiedad de que el producto escalar entre dos vectores está acotado, se establece por: $-\|A\|\|B\| \leq A \cdot B \leq \|A\|\|B\|$. Por otro lado, también resulta útil establecer que se verifica la desigualdad triangular: $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$

Ejemplo 1.4. Suponga que $A = -i - j + 3k$ y $B = -2i - j - 3k$, se pide calcular el ángulo entre los dos vectores.

Solución

$$A \cdot B = (-1)(-2) + (-1)(-1) + (3)(-3) = -6$$

$$\|A\| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + (3)^2} = \sqrt{11}; \|B\| = \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + (3)^2} = \sqrt{14}$$

$$\cos\theta = \frac{A \cdot B}{\|A\|\|B\|} = \frac{-6}{\sqrt{11}\sqrt{14}} = -0.48, \theta = \cos^{-1}(-0.48) = 119^\circ$$

Ejemplo 1.5. Suponga que $A = 2i + 5j - 3k$ y $B = -3i + 4j + 4k$, mediante dos métodos diferentes se pide calcular el ángulo entre los dos vectores y realizar su grafica.

Solución

Primer método: de los vectores dados, $A = 2i + 5j - 3k$ y $B = -3i + 4j + 4k$ se tiene,

$$\|A\| = \sqrt{(2)^2 + (5)^2 + (-3)^2} = \sqrt{38} = 6.16$$

$$\|B\| = \sqrt{(-3)^2 + (4)^2 + (4)^2} = \sqrt{41} = 6.40$$

$$A \cdot B = (2)(-3) + (5)(4) + (-3)(4) = 2$$

A partir de la ecuación, $\cos\theta = \frac{A \cdot B}{\|A\|\|B\|}$, se tiene,

$$\cos\theta = \frac{2}{\sqrt{38}\sqrt{41}} = 0.0507, \theta = \cos^{-1}(0.0507) = 87^\circ$$

Segundo método: De los vectores dados, $A = 2i + 5j - 3k$ y $B = -3i + 4j + 4k$ se tiene,

$$A \times B = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 5 & -3 \\ -3 & 4 & 4 \end{vmatrix} = (5(4) - 4(-3))i - (2(4) + 3(-3))j + (2(4) + 3(5))k$$

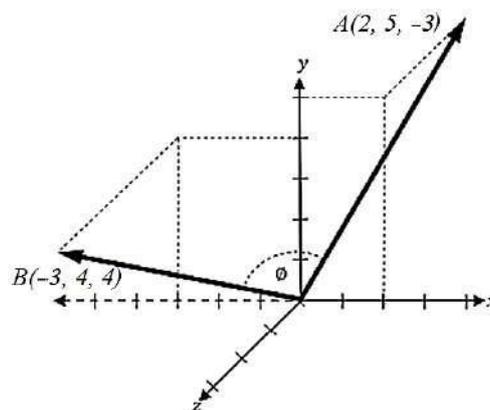
$$= 32i + j + 23k, \text{ por tanto, } \|A \times B\| = \sqrt{(32)^2 + (1)^2 + (23)^2} = \sqrt{1554} = 39.42$$

De la ecuación, $\|A \times B\| = \|A\|\|B\|\sin\theta$, osea, $\sin\theta = \frac{\|A \times B\|}{\|A\|\|B\|}$, se tiene,

$$\sin\theta = \frac{\|A \times B\|}{\|A\|\|B\|} = \frac{39.42}{(9.16)(6.40)} = 0.9987, \theta = \sin^{-1}(0.9987) = 87^\circ$$

Figura 7

Ángulo entre r_1 y r_2



Nota: Autor (2024)

1.2.4. Producto vectorial

Se define como producto vectorial entre los vectores $A = A_1i + A_2j + A_3k$ y $B = B_1i + B_2j + B_3k$, a un nuevo vector resultado de la operación:

$$A \times B = \begin{vmatrix} i & j & k \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} = (A_2A_3 - A_3A_2)i + (A_3A_1 - A_1A_3)j + (A_1A_2 - A_2A_1)k$$

Resulta útil definir el producto vectorial como el desarrollo de un determinante, además, se puede probar que el producto vectorial no es conmutativo, es distributivo sobre la suma y asociativo con respecto a la multiplicación escalar, es decir,

$$A \times B = -B \times A; A \times (B + C) = A \times B + A \times C; A \times (cB) = (cA) \times B = c(A \times B)$$

De manera similar al producto punto, la operación producto vectorial en el plano puede ser representada de manera geométrica como el área del paralelogramo cuyos lados adyacentes son los vectores, o sea, dados dos vectores A y B con un ángulo θ entre ellos, de manera que el vector A sea paralelo al eje x y B esté en el plano $x - y$, entonces, se tiene: $A = A_1i$, y $B = B_1i + B_2j = |B|\cos\theta i + |B|\sin\theta j$, ó sea $A \times B = |A||B|\sin\theta k$, y de manera escalar corresponde a: $A \times B = |A||B|\sin\theta k$.

Ejemplo 1.5. Calcular el producto vectorial de los vectores $A = (1, 2, 3)$ y $B = (-1, 1, 2)$

$$A \times B = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} k = i - 5j + 3k$$

Ejemplo 1.6. Dados los vectores $A = (3, 1, -1)$ y $B = (2, 3, 4)$, hallar el área del paralelogramo que tiene por lados los vectores A y B .

Solución

$$A \times B = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} k = 7i - 14j + 7k$$

Por tanto, el área es, $|A \times B| = \sqrt{7^2 + (-14)^2 + 7^2} = \sqrt{294} = 17.14 u^2$

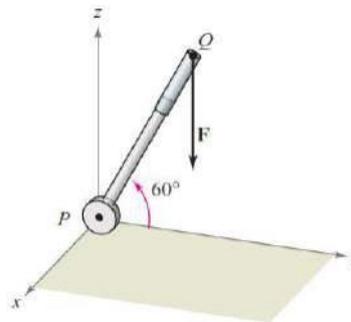
Aplicación del producto vectorial

Ejemplo 1.7. Se aplica una fuerza vertical de 200 N al extremo de una palanca de 50 cm de longitud unida a un eje en el punto P, como se muestra en la figura. Se pide determinar el momento de esta fuerza respecto al punto P cuando $\theta = 60^\circ$.

Solución

Figura 8

Momento de una fuerza



Nota: Autor (2024)

Sea la fuerza $F = -200k$

Además, $PQ = 0.5 (\cos 60^\circ j + \cos 60^\circ k) = 0.25j + 0.433k$

Considerando el momento de F respecto a P, se tiene,

$$M = PQ \times F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0.25 & 0.433 \\ 0 & 0 & -200 \end{vmatrix} = -50i [N.m]$$

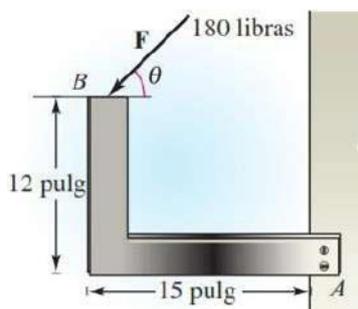
Ejemplo 1.8. Una fuerza de 180 libras actúa sobre el soporte mostrado en la figura.

- Determinar el vector F que representa la fuerza. (F estará en términos de θ),
- Calcular la magnitud del momento respecto a A evaluando $|AB \times F|$
- Usar el resultado del inciso b) para determinar la magnitud del momento cuando $\theta = 30^\circ$.
- Usar el resultado del inciso b) para determinar el ángulo cuando la magnitud del momento es máxima. A ese ángulo, ¿cuál es la relación entre los vectores F y AB .

Solución

Figura 9

Momento de una fuerza



Nota: Autor (2024)

- a. Sea la fuerza $F = -180 (\cos\theta i + \sin\theta j)$

Además, $AB = \frac{-15i+12j}{12} = -1.25i + j$

- b. Considerando el momento F respecto al punto A, se tiene,

$$M = AB \times F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1.25 & 1 & 0 \\ -180\cos\theta & -180\sin\theta & 0 \end{vmatrix} = (225\sin\theta + 180\cos\theta)k \text{ [lb. pie]}$$

- c. Cuando $\theta = 30^\circ$, $|AB \times F| = 225(0.5) + 180(0.866) = 268.4$
 d. Si $|M| = (225 \sin\theta + 180 \cos\theta)k$, entonces $|M| = 0$ para $225 \sin\theta + 180 \cos\theta = 0$, con lo cual se tiene, $\tan\theta = \frac{5}{4} = 1.25$, $\theta = 51.3^\circ$.

1.2.5. Triple producto escalar

El triple producto escalar, que se puede escribir como $A \cdot (B \times C)$ o $A \cdot B \times C$, es una operación que satisface las siguientes relaciones:

$$A \cdot (B \times C) = B \cdot (C \times A) = C \cdot (A \times B)$$

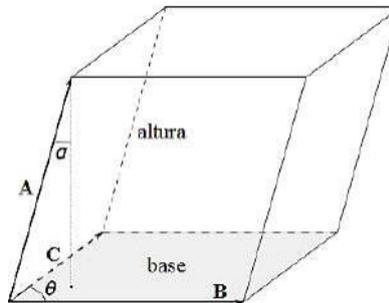
es decir, su valor no cambia bajo una permutación cíclica de los tres vectores. La operación del producto triple escalar se la describe como un determinante de tres por tres, o sea,

$$A \cdot (B \times C) = A \cdot \begin{vmatrix} i & j & k \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix}$$

Es decir, el valor absoluto del determinante de tres por tres generado por el producto triple escalar es el volumen del paralelepípedo definido por los vectores de tres filas A, B y C, como se muestra en la siguiente figura,

Figura 10

Volumen generado por el producto mixto A, B y C



Nota: Autor (2024)

Ejemplo 1.9. Hallar el volumen del paralelepípedo que determinan los vectores $A = (1, 2, 3)$, $B = (-3, 1, 4)$ y $C = (1, 2, 1)$.

Solución

De la fórmula del producto escalar, se tiene,

$$A \cdot (B \times C) = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} (1) - \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} (2) + \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} (3)$$

$$|A \cdot (B \times C)| = |(1 - 8)(1) - (-3 - 4)(2) + (-6 - 1)(3)| = 14$$

Ejemplo 1.10. Determinar el valor de a para que los vectores $A = (0, 1, 1)$, $B = (a, 3, 0)$ y $C = (a, a, 1)$ sean coplanares.

Solución

Para que los vectores sean coplanares el producto mixto debe ser 0, es decir,

$$A \cdot (B \times C) = 0$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ a & 3 & 0 \\ a & a & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ a & 1 \end{vmatrix} (0) - \begin{vmatrix} a & 0 \\ a & 1 \end{vmatrix} (1) + \begin{vmatrix} a & 3 \\ a & a \end{vmatrix} (1) = 0$$

$$0 - a + (a^2 - 3a)(1) = 0, a^2 - 4a = 0, \quad a_1 = 0, a_2 = 4$$

1.3. Rectas y planos en \mathbb{R}^3

1.3.1. Rectas en \mathbb{R}^3

En dos dimensiones, la ecuación de una línea en forma de pendiente-intersecto con el eje y , es $y = mx + b$, y en forma de punto-pendiente es $y - y_1 = m(x - x_1)$. En tres dimensiones, una recta se expresa más comúnmente como una ecuación paramétrica, o sea, si se considera una recta que pasa por un punto y el vector de posición r y en dirección paralela al vector v , entonces, de la definición de suma de vectores, el vector de posición r para cualquier punto de la recta se define como, $r = r_0 + vt$, donde t es un parámetro que puede tomar cualquier valor real.

Esta ecuación paramétrica presenta un significado físico, o sea, si r es el vector de posición de una partícula, entonces v es el vector de velocidad y t es el tiempo. En particular, derivar $r = r(t)$ con respecto al tiempo da como resultado: $dr / dt = v$. Se puede obtener una ecuación no paramétrica para la línea eliminando t de las ecuaciones para los componentes. Las ecuaciones de los componentes son:

$$x = x_0 + v_1t, \quad y = y_0 + v_2t, \quad z = z_0 + v_3t$$

y eliminando el parámetro t , resulta:

$$\frac{x - x_0}{v_1} = \frac{y - y_0}{v_2} = \frac{z - z_0}{v_3}$$

Ejemplo 1.11. Hallar un conjunto de ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por los puntos $(-2, 1, 0)$ y $(1, 3, 5)$.

Solución

Cálculo del vector de desplazamiento entre los dos puntos dados, o sea,

$$v = (1 - (-2))i + (3 - 1)j + (5 - 0)k = 3i + 2j + 5k$$

Empleando los números de dirección $a = 3$, $b = 2$, $c = 5$ y junto con el punto $A(-2, 1, 0)$ se obtienen las ecuaciones paramétricas

$$x = -2 + 3t; \quad y = 1 + 2t; \quad z = 5t$$

que puede ser escrita como sigue,

$$\frac{x + 2}{3} = \frac{y - 1}{2} = \frac{z}{5}$$

Debe observarse que como t varía sobre todos los números reales, las ecuaciones para métricas del ejemplo determinan los puntos (x, y, z) sobre la recta. En particular, hay que observar que para $t = 0$ y $t = 1$ se obtienen los puntos originales $A(-2, 1, 0)$ y $B(1, 3, 5)$.

Ejemplo 1.12. Determinar la ecuación paramétrica de una línea que pasa por los puntos $A(1, 2, 3)$ y $B(3, 2, 1)$. Determine el punto de intersección de la línea con el plano $z = 0$.

Solución

Cálculo del vector de desplazamiento entre los dos puntos dados, o sea,

$$v = (3 - 1)i + (2 - 2)j + (1 - 3)k = 2i - 2k$$

Se escoge un punto en la recta con vector de posición $r = i + 2j + 3k$, la ecuación paramétrica de la recta viene dada por,

$$r = r_0 + vt = i + 2j + 3k + t(2i - 2k) = (1 + 2t)i + 2j + (3 - 2t)k$$

Luego, la línea cruza el plano $z = 0$ cuando $3 - 2t = 0, t = 3/2$, en el punto $P(x, y) = (4, 2)$.

Ejemplo 1.13. Determinar la ecuación paramétrica, continua e implícita de una línea que pasa por el punto $A(-1, 2, 1)$ y cuyo vector director es $v(4, 5, -1)$.

Solución

En forma paramétrica la ecuación corresponde a: $x = 1 + 4t; y = 2 + 5t; z = 1 - t$ y de forma continua $\frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{5} = \frac{z-1}{-1}$, además si, $\frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{5}, \frac{y-2}{5} = \frac{z-1}{-1}$

Entonces, la ecuación de manera implícita corresponde a, $\begin{cases} 5x - 4y + 3 = 0 \\ x + 4z - 5 = 0 \end{cases}$

1.3.2. Planos en \mathbb{R}^3

Un plano en el espacio está determinado por tres puntos no colineales. A partir de estos tres puntos se pueden formar dos vectores de desplazamiento linealmente independientes con dirección paralela al plano, y el producto cruzado

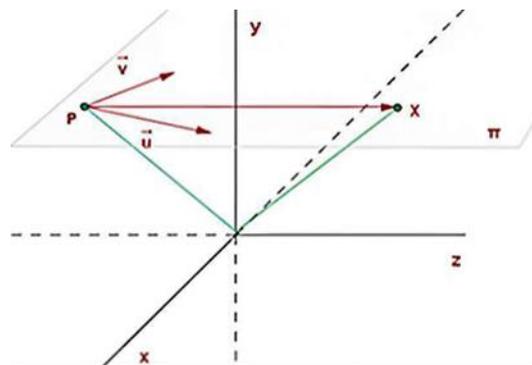
de estos dos vectores de desplazamiento será un vector ortogonal al plano. Podemos usar el producto escalar para expresar esta ortogonalidad.

Se parte de que tres puntos definen un plano y se localizan los vectores de posición r_1, r_2 y r_3 , y construyamos dos vectores de desplazamiento cualesquiera, como $s_1 = r_2 - r_1$ y $s_2 = r_3 - r_2$. Un vector normal al plano viene dado por $N = s_1 \times s_2 = 0$, y para cualquier punto del plano con vector de posición r_i dados, tenemos $N \cdot (r - r_i) = 0$. Con $r = xi + yj + zk$, $N = ai + bj + ck$ y $d = N \cdot r_i$, la ecuación del plano se puede escribir como sigue: $ax + by + cz = d$.

Debe observarse que los coeficientes de x , y y z son los componentes del vector normal al plano. Se puede expresar la ecuación de un plano π que pasa por un punto P y un par de vectores u, v sobre este plano con diferentes direcciones, o sea,

Figura 11

Ecuación vectorial del plano



Nota: Autor (2024)

Donde, el vector PQ es coplanario a los vectores u, v , por tanto,

$$PQ = \lambda u + \mu v = (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = \lambda(u_1, u_2, u_3) + \mu(v_1, v_2, v_3)$$

Es decir, $(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda(u_1, u_2, u_3) + \mu(v_1, v_2, v_3)$

Ecuación que también puede ser escrita de manera implícita como sigue,

$$x - x_0 = \lambda u_1 + \mu v_1$$

$$y - y_0 = \lambda u_2 + \mu v_2$$

$$z - z_0 = \lambda u_3 + \mu v_3$$

También resulta útil escribir la ecuación del plano π estableciendo el determinante de la matriz ampliada del sistema anterior como sigue,

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & \lambda u_1 & \mu v_1 \\ y - y_0 & \lambda u_2 & \mu v_2 \\ z - z_0 & \lambda u_3 & \mu v_3 \end{vmatrix} = 0, \text{ o sea}$$

$$\begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} (x - x_0) + \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} (y - y_0) + \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} (z - z_0)$$

Sustituyendo, $A = \begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix}, B = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix}, C = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix}$

Es decir, $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$, y si se toma, $D = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0)$

Se obtiene la ecuación general del plano definida por: $Ax + By + Cz + D = 0$

Ejemplo 1.14. Hallar la ecuación general del plano que pasa por los puntos $A(-1, 2, 3)$ y $B(3, 1, 4)$ y contiene al vector $u = (0, 0, 1)$.

Solución

A partir de la información dada, se obtiene,

$$x - x_0 = \lambda u_1 + \mu v_1 \quad x = -1 + 4\lambda + 0\mu$$

$$y - y_0 = \lambda u_2 + \mu v_2, \text{ o sea, } y = 2 - \lambda + 0\mu, \text{ donde la matriz ampliada del sistema}$$

$$\text{con la } z - z_0 = \lambda u_3 + \mu v_3 \quad z = 3 + \lambda + \mu$$

columna de los términos independientes tiene que ser igual a cero, es decir,

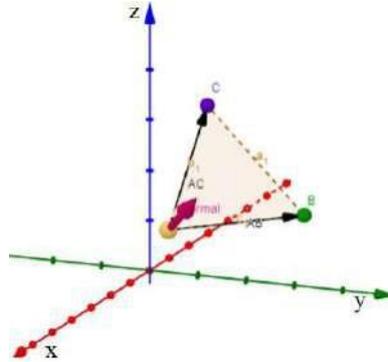
$$\begin{vmatrix} x + 1 & 4 & 0 \\ y - 2 & -1 & 0 \\ z - 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad -(x + 1) - 4(y - 2) + 0(y - 2 + z - 3) = 0$$

Determinante que nos da la ecuación general del plano: $x + 4y - 7 = 0, x, y, z \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 1.15. Determinar la ecuación del plano definido por los tres puntos $A(2, 1, 1), B(1, 2, 1)$, y $C(1, 1, 2)$ también encontrar la ecuación de la línea en el plano x-y formada por la intersección de este plano con el plano $z = 0$.

Figura 12

Ecuación del plano



Nota: Autor (2024)

Solución

Para encontrar dos vectores paralelos al plano, se hallan los dos vectores de desplazamiento desde los tres puntos, o sea,

$$s_1 = (1 - 2)i + (2 - 1)j + (1 - 1)k = -i + j$$

$$s_2 = (1 - 1)i + (1 - 2)j + (2 - 1)k = -j + k$$

El vector normal al plano se determina por,

$$N = s_1 \times s_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = i + j + k$$

Luego, la ecuación correspondiente del plano es,

$$(i + j + k)(xi + yj + zk) = (i + j + k)(2i + j + k), \text{ es decir, } x + y + z = 4$$

La intersección de este plano con el plano $z = 0$ forma la recta dada por $y = x + 4$

1.3.3. Ángulo entre planos

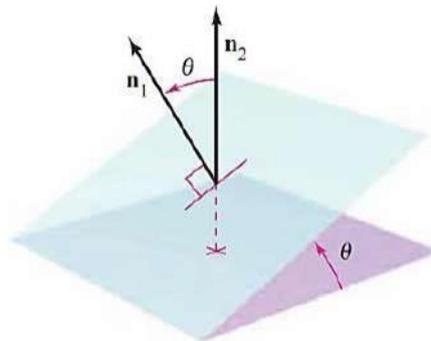
Dos planos distintos en el espacio o son paralelos o se cortan en una recta. Si se cortan, se puede determinar el ángulo ($\theta \leq \theta \leq \pi/2$) entre ellos a partir del ángulo entre sus vectores normales, como se muestra en la figura. Específicamente, si los vectores n_1 y n_2 son normales a dos planos que se

cortan, el ángulo θ entre los vectores normales es igual al ángulo entre los dos planos y está dado por,

$$\cos\theta = \frac{|n_1 \cdot n_2|}{\|n_1\| \|n_2\|}$$

Figura 13

Ángulo entre planos



Nota: Autor (2024)

Por consiguiente, dos planos con vectores normales y son:

- a. Perpendiculares si $n_1 \cdot n_2 = 0$
- b. paralelos si n_1 es un múltiplo escalar de n_2

Ejemplo 1.16. Determinar el ángulo formado entre los planos siguientes: $x - 2y + z = 0$, y $2x + 3y - 2z = 0$, así como las ecuaciones paramétricas de su recta de intersección.

Solución

Los vectores normales a los planos son $n_1 = (1, -2, 1)$, y $n_2 = (2, 3, -2)$, por consiguiente, el ángulo entre los dos planos corresponde a,

$$\cos\theta = \frac{|n_1 \cdot n_2|}{\|n_1\| \|n_2\|} = \frac{1(1, -2, 1) \cdot (2, 3, -2)|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2} \sqrt{2^2 + 3^2 + 2^2}} = \frac{6}{\sqrt{6}\sqrt{17}} = 0.5941, \theta = 53.6^\circ$$

Para la determinación de la recta de intersección se plantea un sistema de ecuaciones definido por las ecuaciones de los dos planos, o sea,

$$\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 2x + 3y - 2z = 0 \end{cases} \text{ que al ser resuelta se tiene por solución } y = 4z/7$$

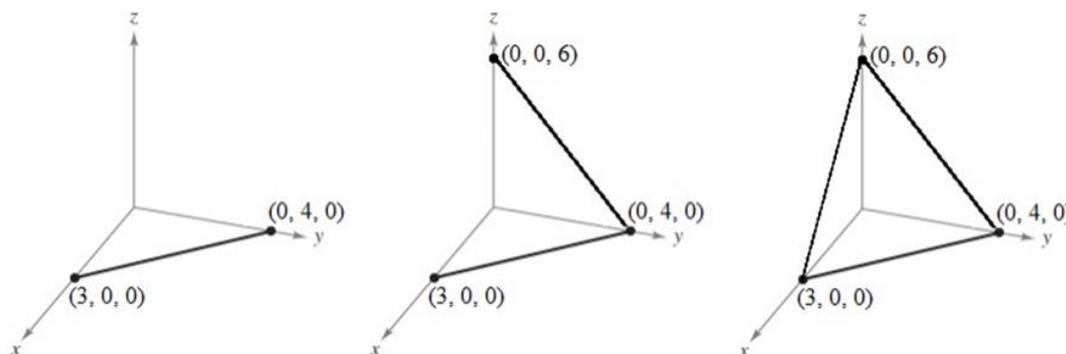
A su vez, sustituyendo en una de las ecuaciones originales, se determina que $x = z/7$. Finalmente, sustituyendo el parámetro t por $t = z/7$, se obtienen las ecuaciones paramétricas $x = t$, $y = 4t$, $z = 7t$, donde 1, 4 y 7 son los números de dirección de la recta de intersección.

1.3.4. Trazado de planos en \mathbb{R}^3

Si un plano en el espacio se intersecta con uno de los planos coordenados, entonces la línea de intersección se llama la traza del plano, luego, para dibujar un plano en el espacio, es útil encontrar su punto de intersección con los ejes de coordenadas y la ubicación en el plano de coordenadas. Considere, por ejemplo, el plano dado por $4x + 3y + 2z = 12$, se puede hallar la traza xy , haciendo $z = 0$ y dibujando la recta $4x + 3y = 12$, en el plano xy . Esta recta corta el eje x en $(3, 0, 0)$ y el eje y en $(0, 4, 0)$, de igual manera se puede encontrar la traza yz y la traza xz , podemos resumir las trazas como sigue:

Figura 14

Trazas del plano $4x + 3y + 2z = 12$



Nota: Autor (2024)

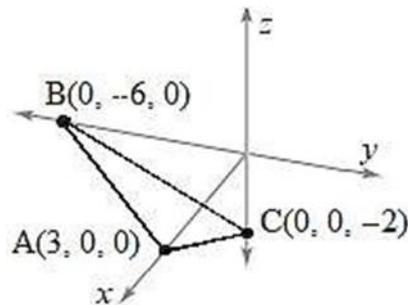
Ejemplo 1.17. Marcar toda intersección y determinar las trazas del plano definido por, $2x - y - 3z = 6$

Solución

Haciendo $z = 0$ y dibujando la recta $2x - y = 6$, en el plano xy , esta recta corta el eje x en $(3, 0, 0)$ y el eje y en $A(0, -6, 0)$; tomando $y = 0$ y dibujando la recta $2x - 3z = 6$, se tiene el punto $C(0, 0, -2)$ en el plano xz , luego la gráfica correspondiente es,

Figura 15

Trazas de los planos



Nota: Autor (2024)

1.3.5. Distancias entre puntos, planos y rectas

En este apartado se realiza el análisis de dos tipos básicos de problemas sobre distancias en el espacio, es decir:

- **Determinación de la distancia de un punto a un plano**

Para este caso la distancia de un punto a un plano π (no en el plano) se establece por,

$$d_{PQ\pi} = |\text{proy}_n PQ| = \frac{|PQ \cdot n|}{\|n\|}$$

donde P es un punto en el plano y n es normal al plano.

Ejemplo 1.18. Determinar la distancia del punto $Q(1, 4, -4)$ al plano $5x - y + 2z = 10$

Solución.

Puesto que $n = (5, -1, 2)$ es normal al plano dado. Para hallar un punto en el plano, se hace $y = 0$ y $z = 0$, y se obtiene el punto $P(2, 0, 0)$, luego el vector desplazamiento que va de P a Q está dado por, $PQ = (1 - 2, 4 - 0, -4 - 0) = (-1, 4, -4)$

Empleando la fórmula de la distancia de un punto a un plano se tiene,

$$d_{PQ\pi} = \frac{|PQ \cdot n|}{\|n\|} = \frac{|(-1, 4, -4) \cdot (5, -1, 2)|}{\sqrt{5^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{|-5 - 4 - 8|}{\sqrt{30}} = \frac{17}{\sqrt{30}}$$

Como una variante a este caso, la distancia entre dos planos paralelos, para lo cual se conoce un punto de un plano $Q(x_0, y_0, z_0)$ y el plano correspondiente $Ax + By + Cz + D = 0$, está dado por,

$$d = \frac{|A(x_0 - x_1) + B(y_0 - y_1) + C(z_0 - z_1)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Ejemplo 1.19. Determinar la distancia entre los dos planos paralelos dados por $6x - 2y + 4z = -4$ y $3x - y + 2z = 6$

Solución

Empleando un punto del segundo plano, $P(2, 0, 0)$, y el primer plano, para luego reemplazar los datos en la ecuación anterior, se tiene,

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|6(2) + (-2)(0) + (4)(0) + 4|}{\sqrt{6^2 + (-2)^2 + 4^2}} = \frac{16}{\sqrt{56}} = \frac{8}{\sqrt{14}}$$

- **Determinación de la distancia de un punto a una recta**

La distancia de un punto Q a una recta l en el espacio está dada por, $d_{PQl} = \frac{\|PQ \times u\|}{\|u\|}$ donde u es un vector de dirección para la recta y P es un punto sobre la recta.

Ejemplo. 1.20. Determinar la distancia del punto $Q(2, -1, 3)$ a la recta dada por, $x = -2 + 3t, y = -2t, z = 1 + 4t$

Los coeficientes del parámetro t , nos permite determinar las coordenadas del vector dirección como sigue, $u = (3, -2, 4)$, y tomando un punto de la recta para $t = 0$, se tiene, $P = (-2, 0, 1)$ Luego, el vector desplazamiento PQ corresponde a, $PQ = (2 - (-2), -1 - 0, 3 - 1) = (4, -1, 2)$

Y aplicando la formula, se tiene lo siguiente,

$$\|PQ \times u\| = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 4 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} = -i - 8j - 2k$$

$$\|PQ \times u\| = \sqrt{(-1)^2 + (-8)^2 + (-2)^2} = \sqrt{69}$$

$$\|u\| = \sqrt{3^2 + (-2)^2 + 4^2} = \sqrt{29}$$

$$d_{PQl} = \frac{\|PQ \times u\|}{\|u\|} = \frac{\sqrt{69}}{\sqrt{29}} = 2.22$$

1.4. Superficies en el espacio

1.4.1. Superficies cuádricas

Las superficies cuádricas en el espacio corresponden a la gráfica de una ecuación de segundo grado en las variables x , y , z , y de manera general se denota por,

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0$$

Hay seis tipos básicos de superficies cuádricas: elipsoide, hiperboloide de una hoja, hiperboloide de dos hojas, cono elíptico, paraboloides y paraboloides hiperbólicos. A continuación, se muestra un resumen de las características de cada una de estas ecuaciones.

Elipsoide:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Traza Plano

Elipse: Paralelo al plano xy

Elipse: Paralelo al plano xz

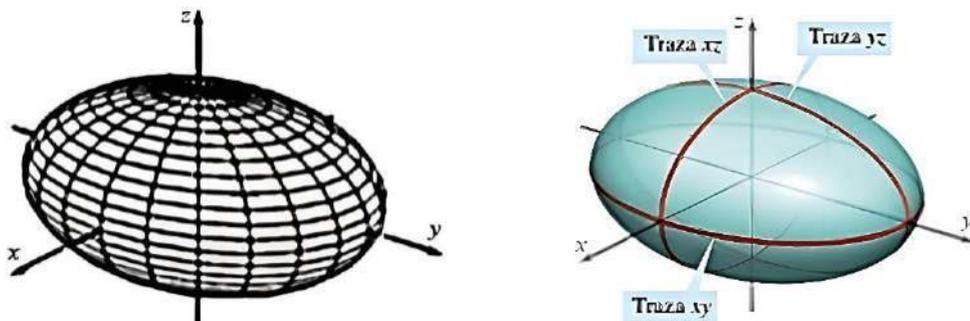
Elipse: Paralelo al plano yz

La superficie es una esfera si:

$$a = b = c \neq 0$$

Figura 16

Principales superficies cuádricas



Nota: Autor (2024)

Hiperboloide de una hoja:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Traza Plano

Elipse: Paralelo al plano xy

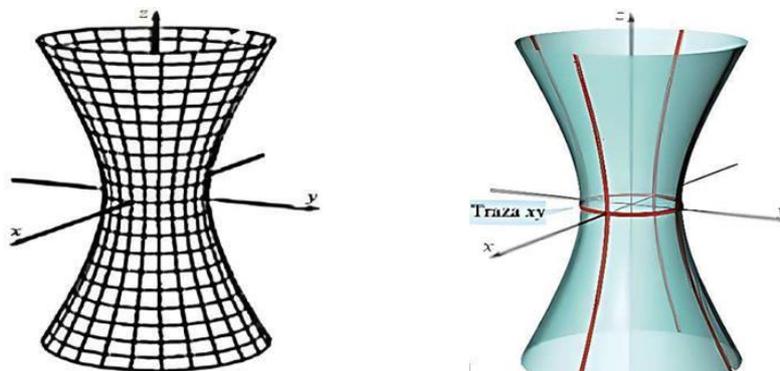
Hipérbola: Paralelo al plano xz

Hipérbola: Paralelo al plano yz

El eje del hiperboloide corresponde a la variable de coeficiente negativo

Figura 17

Principales superficies cuádricas



Nota: Autor (2024)

Hiperboloide de dos hojas:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Traza Plano

Elipse: Paralelo al plano xy

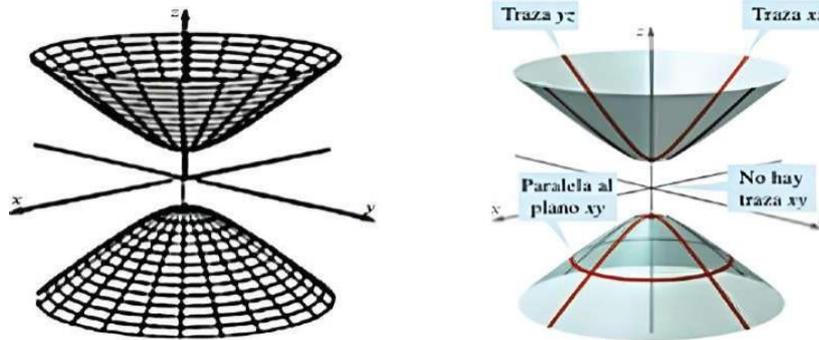
Hipérbola: Paralelo al plano xz

Hipérbola: Paralelo al plano yz

El eje del hiperboloide corresponde a la variable de coeficiente positivo. No hay traza en el plano coordenado perpendicular a este eje

Figura 18

Principales superficies cuádricas



Nota: Autor (2024)

Cono elíptico:

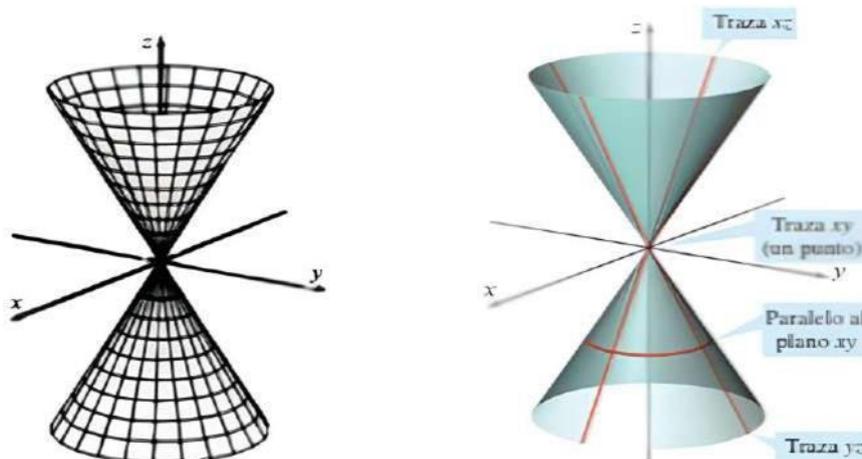
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

Traza	Plano
Circunferencia:	Paralelo al plano xy
Hipérbola:	Paralelo al plano xz
Hipérbola:	Paralelo al plano yz

El eje del cono corresponde a la variable de coeficiente negativo. Las trazas en los planos coordenados paralelos a este eje son rectas que se cortan.

Figura 19

Principales superficies cuádricas



Nota: Autor (2024)

Paraboloide elíptico:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - z = 0$$

Traza Plano

Elipse: Paralelo al plano xy

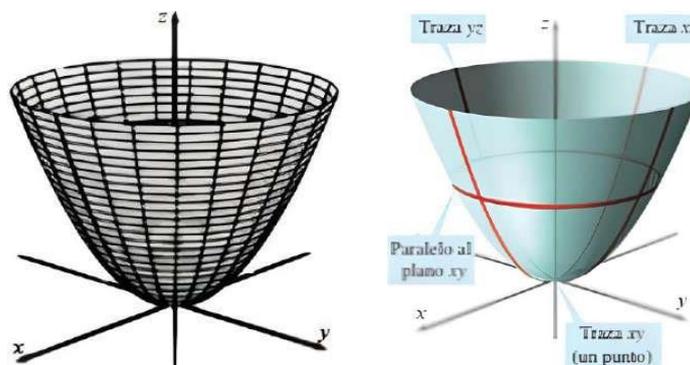
Parábola: Paralelo al plano xz

Parábola: Paralelo al plano yz

El eje del paraboloide corresponde a la variable elevada a la primera potencia.

Figura 20

Principales superficies cuádricas



Nota: Autor (2024)

Paraboloide hiperbólico:

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} - z = 0$$

Traza Plano

Hipérbola: Paralelo al plano xy

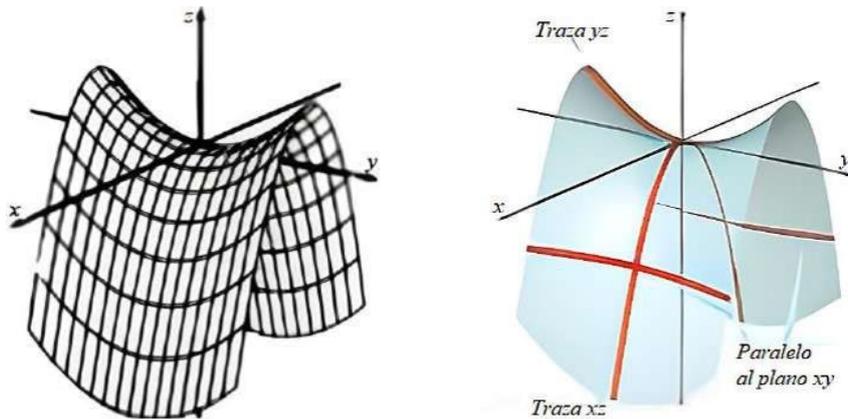
Parábola: Paralelo al plano xz

Parábola: Paralelo al plano yz

El eje del paraboloide corresponde a la variable elevada a la primera potencia.

Figura 21

Principales superficies cuádricas



Nota: Autor (2024)

Las trazas corresponden a las vistas laterales (*planos xz y yz*) y la vista superior (*plano xy*) de cualquier superficie en el espacio.

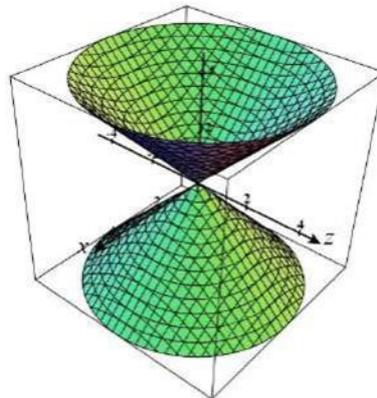
Ejemplo 1.21. Clasificar y graficar la superficie de ecuación $x^2 - y^2 + z^2 = 0$. Determinar cuáles de los siguientes puntos pertenecen a la superficie: $O(0, 0, 0)$, $A(-3, -5, -4)$, $B(1, 1, 1)$, $C(1, 2, 1)$

Solución

La ecuación de la superficie puede reescribirse como sigue, $y^2 = x^2 + z^2$, además, no posee término constante y las variables están elevadas al cuadrado, dos llevan el mismo signo, luego se trata de una superficie cónica, de eje y . Podemos agregar que se trata de un cono circular puesto que los coeficientes de las variables x y z son iguales a 1. Las trazas perpendiculares al eje y se obtienen fijando $y = k$, o sea son las circunferencias de la forma, $\begin{cases} y = k \\ x^2 + z^2 = k^2 \end{cases}$, para cada $k \in \mathbb{R}$ (obsérvese que si $k = 0$ se reduce a un punto).

Figura 22

Cono elíptico



Nota: Autor (2024)

Las trazas en $x = p$ y en $z = q$ son hipérbolas. Respecto a los puntos O, A, B y C se tiene lo siguiente: $O(0,0,0) \rightarrow 0^2 - 0^2 + 0^2 = 0$, por tanto $O \in \mathbb{R}^3$

$A(-3, -5, -4) \rightarrow (-3)^2 - (-5)^2 + (-4)^2 = 0$, por tanto $A \in \mathbb{R}^3$

$B(1, 1, 1) \rightarrow 1^2 - 1^2 + 1^2 = 1$, por tanto $O \notin \mathbb{R}^3$

$C(1, 2, 1) \rightarrow 1^2 - 2^2 + 1^2 = -2$, por tanto $O \notin \mathbb{R}^3$

Ejemplo 1.22. Clasificar y graficar la superficie de ecuación: $4x^2 + y^2 + z^2 - 8x = 0$

Solución

Arreglamos la ecuación con el fin de completar cuadrados de binomios, es decir,

$$4x^2 - 8x + y^2 + z^2 = 0 \rightarrow 4(x^2 - 2x) + y^2 + z^2 = 0 \rightarrow 4(x - 1)^2 + y^2 + z^2 = 4$$

Donde dividiendo por 4 finalmente nos queda, $\frac{(x-1)^2}{1} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{4} = 1$. Luego, se trata de un elipsoide, con centro en el punto $(1, 0, 0)$.

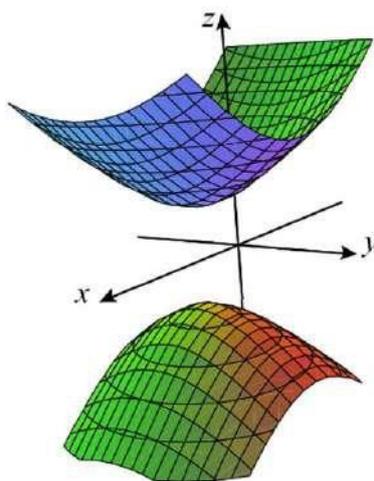
Ejemplo 1.23. Se pide determinar la ecuación de la superficie y simetría del lugar geométrico de los puntos del plano cuya distancia al punto $(2, -1, 3)$ es dos veces su distancia al plano XY .

Solución

Referente al enunciado se tiene lo siguiente, $\sqrt{(x - 2)^2 + (y + 1)^2 + (z - 3)^2} = 2\sqrt{z^2}$, elevando al cuadrado esta expresión se obtiene, $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 + (z - 3)^2 = 4z^2$, y reduciendo términos semejantes, se obtiene la ecuación, $(z + 1)^2 - (x - 2)^2 - (y + 1)^2 = 12$, dividiendo cada término entre 12, se tiene, $\frac{(z+1)^2}{4} - \frac{(x-2)^2}{12} - \frac{(y+1)^2}{12} = 1$.

Figura 23

Hiperboloide

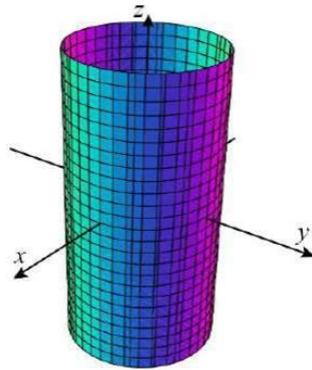


Nota: Autor (2024)

Se trata de un hiperboloide de dos hojas con centro de simetría en el punto $(2, -1, -1)$. Como caso particular, el conjunto de puntos en el espacio que satisface la ecuación $x^2 + y^2 = 1$, sin aclarar nada acerca de los valores que puede tomar z , genera el cilindro circular recto de eje z y radio 1 (se puede pensar como una sucesión de circunferencias apoyadas una encima de otra, para todo z), por ejemplo, un tubo de rollo de paños de limpieza, otro ejemplo lo constituye la ecuación $y = x^2$, en este caso, los puntos de la forma (x, x^2, c) generan en el plano $z = c$ una parábola de eje y y ramas hacia $+y$; tomando todos los valores reales de c se genera un cilindro parabólico. Las gráficas de estos casos particulares son los siguientes:

Figura 24

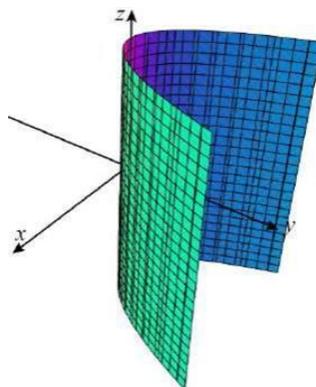
a. Cilindro circular $x^2 + y^2 = 1$



Nota: Autor (2024)

Figura 25

b. Cilindro parabólico $y = x^2$



Nota: Autor (2024)

1.5. Sistemas de coordenadas

Como se expuso en líneas anteriores, el sistema de coordenadas cartesianas tridimensional, el cual contiene tres ejes perpendiculares entre sí: x, y y z , es una de la situaciones más común en la vida real para describir ecuaciones de objetos geométricos como líneas, planos y superficies curvas en \mathbb{R}^3 , sin embargo, en ocasiones resulta más conveniente trabajar en sistemas de coordenadas diferentes de las coordenadas cartesianas, como son las coordenadas cilíndricas y las coordenadas esféricas, sobre todos cuando la región sobre la que se trabaja presenta ciertas simetrías con determinados ejes.

1.5.1. Coordenadas cilíndricas

En el sistema de coordenadas cilíndricas, un punto en el espacio está representado por el triple ordenado (r, θ, z) donde:

- (r, θ) son las coordenadas polares de la proyección de un punto sobre el plano xy .
- z es la coordenada habitual perpendicular al plano xy .

En la figura se observa que el punto $P(x, y, z)$ tiene su equivalente $P(r, \theta, z)$, donde el triángulo rectángulo que se encuentra en el plano xy . La longitud de la hipotenusa es r y θ es la medida del ángulo formado por el eje positivo x y la hipotenusa. La coordenada z describe la ubicación del punto encima o debajo del plano xy , presentándose así la siguiente relación:

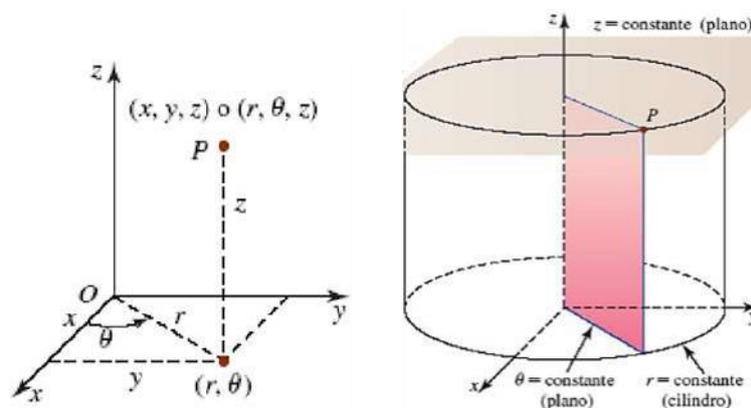
$$x = r \cos \theta; y = r \sin \theta; z = z$$

No obstante, a partir de conceptos básicos de trigonometría es posible crear un puente bidireccional entre estos dos sistemas de coordenadas mediante las relaciones:

$$r^2 = x^2 + y^2; \tan \theta = y/x; z = z$$

Figura 26

Representación de un sistema en coordenada cilíndrica



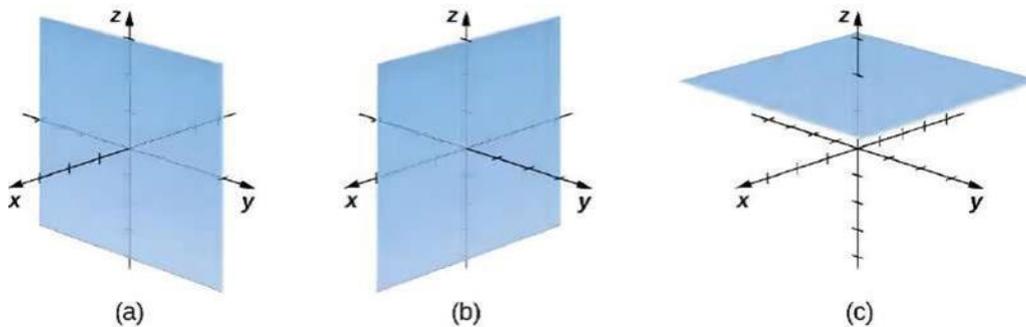
Nota: Autor (2024)

Si se examina la diferencia entre las coordenadas cartesianas y las coordenadas cilíndricas a partir de la superficie generada cuando cada coordenada es una constante k , entonces las superficies con la forma $x = k, y = k, z = k$ son todos planos en el sistema de coordenadas cartesianas. Los planos de estas formas

son paralelos al plano yz , al plano xzy al plano xy , respectivamente. La coordenada z no cambia cuando se convierte a coordenadas cilíndricas. En coordenadas cilíndricas, una superficie de la forma $z = k$, es por tanto, un plano paralelo al plano xy .

Figura 27

Planos paralelos

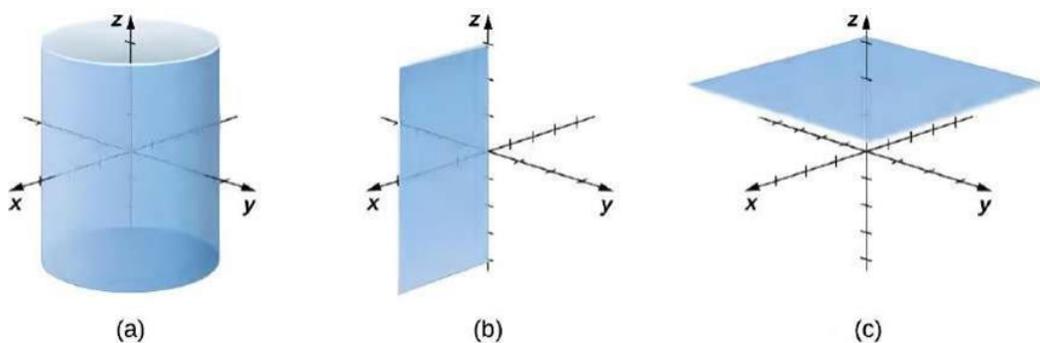


Nota: (a) $x = c$, plano paralelo a yz , (b) $y = c$, plano paralelo a xz , (c) $z = c$, plano paralelo a xy . Autor (2024)

Por otro lado, superficies de la forma $r = k$, representa cilindros verticales de radio k , superficies de la forma $\theta = c$, estos son semiplanos en ángulo θ desde el eje x , y si las superficies son de la forma $z = k$, corresponde a planos paralelos a xy , esto se ilustra en la siguiente figura.

Figura 28

Cilindro



Nota: (a) $r = k$, cilindro radio k , (b) $\theta = c$, semiplano, (c) $z = c$, plano paralelo a xy . Autor (2024)

Ejemplo 1.24. Trazar el punto de coordenadas cilíndricas $P(4, 5\pi/6, 3)$ y expresar su ubicación en coordenadas rectangulares.

Solución

Mediante las fórmulas de conversión de cilíndricas a rectangulares, se obtiene,

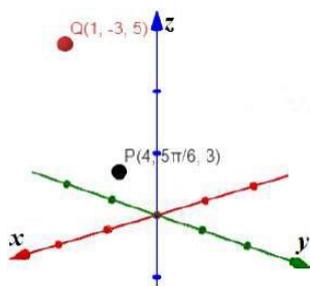
$$x = 4 \cos \frac{5\pi}{6} = 4 \left(-\frac{3}{2} \right) = -2\sqrt{3}, y = 4 \operatorname{sen} \frac{5\pi}{6} = 4 \left(\frac{1}{2} \right) = 2, z = 3$$

Así pues, en coordenadas rectangulares ese punto es $(x, y, z) = (-2\sqrt{3}, 2, 3)$

Ejemplo 1.25. Trazar el punto de coordenadas rectangulares $Q(1, -3, 5)$ y expresar su ubicación en coordenadas cilíndricas.

Figura 29

Conversión coordenadas



Nota: Autor (2024)

Solución

Mediante las fórmulas de conversión de rectangulares a cilíndricas, se obtiene, $r^2 = x^2 + y^2 \rightarrow r = \pm\sqrt{1^2 + (-3)^2} = \pm\sqrt{10}$, por ser r una dimensión positiva se elige signo +.

Ahora, al aplicar la fórmula para hallar θ , $\tan\theta = y / x = -3 / 1 = -3$, en este caso, y es negativo y x es positivo, lo que significa que debemos seleccionar el valor de θ entre $3\pi/2$ y 2π , $z = 5$. Finalmente, el punto $Q(1, -3, 5)$ tiene de coordenadas cilíndricas $P(10, 288^\circ, 5)$.

1.5.2. Coordenadas esféricas

Como ya se expuso, en el sistema de coordenadas cilíndricas, la ubicación de un punto en el espacio se describe usando dos distancias (r y z) y una medida

de ángulo (θ). En el sistema de coordenadas esféricas, se describe la ubicación de un punto en el espacio mediante una distancia (r) y dos ángulos (θ, ϕ). Las líneas de cuadrícula para coordenadas esféricas se basan en medidas de ángulo, como las de coordenadas polares, para lo cual si se denota un punto $P(\rho, \theta, \phi)$ donde:

- ρ (letra griega rho) es la distancia entre P y el origen ($\rho \neq 0$)
- θ es el mismo ángulo utilizado para describir la ubicación en coordenadas cilíndricas
- ϕ (letra griega phi) es el ángulo formado por el eje z positivo y el segmento de recta \overline{OP} donde O es el origen y $0 \leq \phi \leq \pi$

A partir de conceptos básicos de trigonometría es posible crear un puente bidireccional entre estos los sistemas de coordenadas rectangulares a esféricas o viceversa mediante las siguientes relaciones:

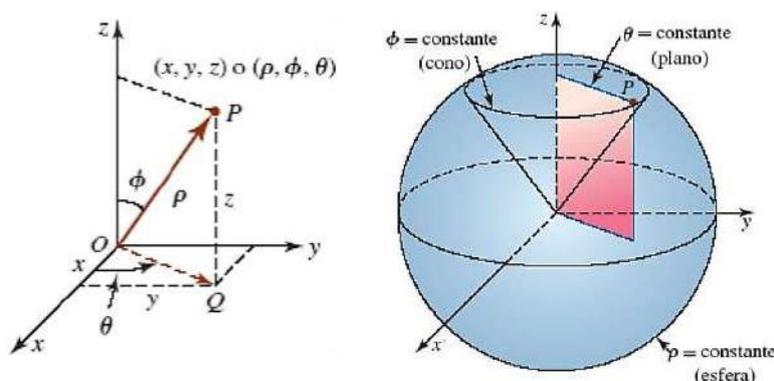
a. Convertir coordenadas rectangulares en coordenadas esféricas:

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2; \tan\theta = \frac{y}{x}; \phi = \cos^{-1}\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right)$$

Estas ecuaciones se utilizan para convertir coordenadas esféricas en coordenadas rectangulares: $x = \rho \sin\phi \cos\theta$; $y = \rho \sin\phi \sin\theta$; $z = \rho \cos\theta$.

Figura 30

Representación de un sistema en coordenadas esféricas



Nota: Autor (2024)

Ejemplo 1.26. Trazar el punto de coordenadas esféricas $P(4, 5\pi/6, 3)$ y expresar su ubicación en coordenadas rectangulares.

Solución

Mediante las fórmulas de conversión de esféricas a rectangulares, se obtiene,

$$x = 4 \operatorname{sen} \pi / 6 \operatorname{cos} \pi / 6 = 4 \left(\frac{1}{2} \right) \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \sqrt{3}$$

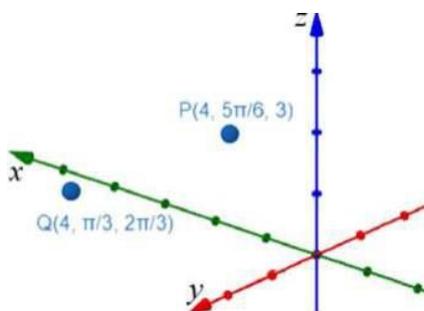
$$y = 4 \operatorname{sen} \pi / 6 \operatorname{cos} \pi / 6 = 4 \left(\frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{1}{4}, z = 4 \operatorname{cos} \pi / 6 = 4 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2\sqrt{3}$$

Así pues, en coordenadas rectangulares ese punto es $(x, y, z) = (\sqrt{3}, 1/4, 2\sqrt{3})$

Ejemplo 1.27. Trazar el punto de coordenadas rectangulares $Q(-\sqrt{3}, -3, -2)$ y expresar su ubicación en coordenadas esféricas.

Figura 31

Conversión coordenadas



Nota: Autor (2024)

Solución

Mediante las fórmulas de conversión de rectangulares a esféricas, se obtiene,

$$\rho = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (-3)^2 + (-2)^2} = 4$$

Ahora, al aplicar la fórmula para hallar θ , $\tan \theta = -\frac{3}{-\sqrt{3}} = \sqrt{3}$, luego $\theta = \tan^{-1} \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$

$$\operatorname{cos} \varphi = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}, \text{ luego, } \theta = \operatorname{cos}^{-1} \left(-\frac{1}{2} \right) = \frac{2\pi}{3}$$

Finalmente, el punto $Q(-\sqrt{3}, -3, -2)$ tiene de coordenadas esféricas $Q(4, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3})$.

1.6. Problemas propuestos

- Operaciones entre vectores en el espacio
1. Dados los vectores de radios $r_1 = 3i - 2j + k$, $r_2 = 3i + 4j + 9k$, $r_3 = -i + 2j + 2k$, Encuentre las magnitudes de:
 - a. $r_1 + r_2 + r_3$ Sol. 13
 - b. $r_1 - r_2 + 4r_3$ So. $2\sqrt{2}$
 - c. $3r_1 + 4r_2 - 5r_3$ Sol. $10\sqrt{17}$
 2. Dados los siguientes vectores: $r_1 = -2i + 3j + k$, $r_2 = 4i - 3j + 3k$, $r_3 = -j + 4k$ efectuar las siguientes operaciones:
 - a. $\|r_1 - r_2\|$ Sol. $\sqrt{76}$
 - b. $r_1 - 3r_2 + 2r_3$ Sol. $-14i + 10j$
 - c. $(r_1 - 2r_2) \cdot 3r_3$ Sol. -87
 - d. $-(4r_2 - 3r_3) \times 2r_2$ Sol. $= 8i - 6j + 6k$
 - e. El ángulo que forma el vector a con cada uno de los ejes coordenados. Sol. $\alpha = 122^\circ, \beta = 37^\circ, \gamma = 75^\circ$
 - f. El ángulo entre los vectores: $3r_2 - 2r_3$ Sol. $\varphi = 129^\circ$
 3. Determinar el ángulo entre los vectores $r_1 = 4i - 2j + 4k$, $r_2 = 3i - 6j - 2k$ Sol. 67°
 4. Encuentre un vector unitario u paralelo a la resultante R de los vectores $r_1 = 2i + 4j - 5k$, $r_2 = -i - 2j + 3k$. Sol. $u = (1/3)i + (2/3)j - (2/3)k$
 5. Determinar los ángulos de un triángulo en el que dos de sus lados están formados por los vectores: $r_1 = 3i - 4j - k$, $r_2 = 4i - j + 3k$ Sol. $36^\circ, 54^\circ$ y 90°
 6. Determinar la proyección del vector A sobre el vector B , donde: $r_1 = 2i - 3j + 6k$, $r_2 = i + 2j + 2k$ Sol. $\frac{8}{3}$
 7. Las fuerzas siguientes actúan sobre una partícula P : $F_1 = 2i + 3j - 5k$, $F_2 = -5i + j + 3k$, $F_3 = i - 2j + 4k$, $F_4 = 4i - 3j - 2k$ medidas en Newton. Encuentre a) la resultante de las fuerzas, b) la magnitud de la resultante. Sol. a) $2i - j$, b) $\sqrt{5}$
 8. Dado el campo escalar definido por $\varphi(x, y, z) = 4yx^3 + 3xyz - 2z^2 + 2$. Encuentre a) $\varphi(1, -1, -2)$, b) $\varphi(0, -3, 1)$. Sol. a) 36, b) -11
 9. Dados los vectores, $r_1 = 2i - j$ y $r_2 = 3i + k$, evalúe $r_1 \cdot r_2$. Sol. 6

10. Dados los vectores $r_1 = 2i - j + 3k$ y $r_2 = 3i + 2j - k$, evalúe $r_1 \cdot r_2$. Sol. 1
- Puntos, rectas y planos en el espacio
1. Encuentre el ángulo entre $r_1 = 2i + 2j - k$ y $r_2 = 7i + 24k$. Sol. $\theta = 98^\circ$
 2. Determine el valor de α de modo que los vectores $r_1 = 2i + \alpha j + ky$ y $r_2 = i + 3j - 8k$ sean perpendiculares. Sol. $\alpha = 2$
 3. Encuentre los ángulos que forma el vector $r = 4i - 8j + k$ con los ejes coordenados. Sol. $\alpha = 64^\circ, \beta = 153^\circ, \gamma = 84^\circ$
 4. Hallar la proyección del vector $r_1 = i - 2j + 3k$ sobre el vector $r_2 = i + 2j + 2k$. Sol. 1
 5. Determinar un vector unitario perpendicular al plano conformado por los vectores: $r_1 = 2i - 6j - 3k$ y $r_2 = 4i + 3j - k$. Sol. $u = (3/7)i - (2/7)j + (6/7)k$
 6. Calcular el trabajo realizado al mover un objeto a lo largo del vector $r = 3i + j - 5k$ [m] si se aplica la fuerza $F = 2i - j - k$ [N]. Sol. 10 J
 7. Suponga que se aplica una fuerza $F = 3i + 2j - 4k$ [N] en el punto $P(1, -1, 2)$. Calcular el momento de F con respecto del punto $Q(2, -1, 3)$. Sol. $2i - 7j - 2k$
 8. Determine la constante a que hace que los vectores $r_1 = 2i - j + k, r_2 = i + 2j - 3k, r_3 = 3i + aj + 5k$ sean coplanares. Sol. $a = -4$
 9. Calcular el volumen del paralelepípedo cuyas aristas están representadas por los vectores $r_1 = 2i - 3j + 4k, r_2 = i + 2j - ky$ y $r_3 = 3i - j + 2k$. Sol. $7u^3$
 10. Determinar el volumen del paralelepípedo cuyas aristas están representadas por los vectores $r_1 = i - j + 2k, r_2 = i + j - ky$ y $r_3 = i - j - 4k$. Sol. $12 u^3$
 11. Encontrar la distancia más corta del punto $P(6, -4, 4)$ a la línea que une con los puntos $Q(2, 1, 2)$ y $R(3, -1, 4)$. Sol. $3u$
 12. Determinar la distancia del origen al plano $2x - 3y + 6z = 0$. Sol. $2u$
 13. Determinar una ecuación del plano perpendicular al vector posición $r = 2i - 3j + 6k$ y que pasa por el punto terminal del vector $B = i + 2j + 3k$. Sol. $2x - 3y + 6z - 14 = 0$
 14. Encontrar el ángulo entre los planos $x + y = 1$ y $y + z = 1$. Sol. $\pi / 3$
 15. Considere las rectas en \mathbb{R}^3 , dadas por:

$$\begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = 2 + t \\ z = t \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1 + s \\ y = -s \\ z = 4 + s \end{cases}$$

Determinar el punto de intersección de las rectas. Sol. $P(-2,3,1)$

16. Determinar las ecuaciones de la recta que pasa por el punto $A(1, -1, 0)$ y

corta a las dos rectas: $\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 2t \\ z = 1 + t \end{cases}$ $\begin{cases} x = -s \\ y = 2 + s \\ z = -2s \end{cases}$ Sol. $\begin{cases} 5x - 4y + 12 = 0 \\ x + 4z + 3 = 0 \end{cases}$

17. Hallar la ecuación vectorial de la recta que pasa por el punto $P(-10, 8, 4)$ y es paralela al vector, $r = 2i + 4j - 7k$. Sol. $(-10i + 8j + 4k + t(2i + 4j - 7k))$.

18. Hallar la ecuación vectorial de la recta que pasa por el punto $P(9, 0, 6)$ y es perpendicular al plano $-3x + 3y - 4z + 4 = 0$. Sol. $(9i + 6k) + t(-3i + 3j - 4k)$.

19. Comprobar si los puntos $A(1, 2, 3), B(4, 7, 8), C(3, 5, 5), D(-1, -2, -3)$ y $E(2, 2, 2)$ son coplanarios. Sol. Los puntos A, B, C, D y E no son coplanarios.

20. Hallar la ecuación del plano que pasa por el origen y es paralelo al plano $-10x + 2y - 5z + 10 = 0$. Sol. $-10x + 2y - 5z = 0$.

21. Hallar la ecuación para la superficie que se obtiene al rotar la parábola $y = x^2$ alrededor del eje y . Sol. $y = x^2 + z^2$.

22. Encontrar la ecuación para la superficie que se obtiene al rotar la recta $z = 5y$ alrededor del eje z . Sol. $x^2 + y^2 = z^2 / 25$.

23. Determinar la ecuación para la superficie que consiste en todos los puntos P que equidistan del punto $P(0, -5, 0)$, y el plano $y = 5$. Sol. $x^2 + z^2 + 20y = 0$.

• **Conversión entre coordenadas cartesianas, cilíndricas y esféricas**

1. Expresar la ecuación $9x^2 + 9y^2 + z^2 = 13$ en coordenadas cilíndricas. Sol. $9r^2 + z^2 = 13$

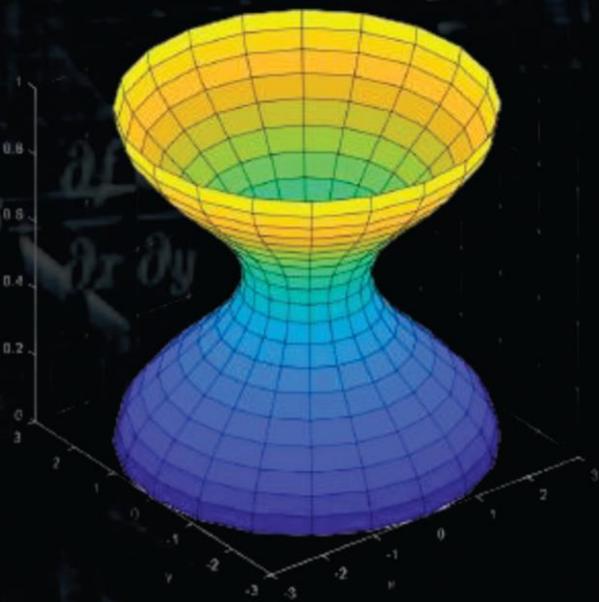
2. Expresar la ecuación $8x^2 + 8y^2 - 4z^2 = 18$ en coordenadas esféricas. Sol. $\rho^2(8\sin^2\varphi - 4\cos^2\varphi)$

3. Expresar la ecuación $z = 4x^2 - 4y^2$ en coordenadas cilíndricas. Sol. $z = 4r^2 \cos 2\theta$

4. El sólido E está arriba del cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y debajo de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 - 6z = 0$. Describir este sólido en coordenadas esféricas. Sol. $0 \leq \rho \leq 6, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \varphi \leq \pi$.
5. En los siguientes ejercicios, se dan las coordenadas cartesianas (x, y, z) de un punto, calcular las coordenadas esféricas (r, θ, φ) del punto correspondiente. *a.* $P(4,0,0)$ *b.* $Q(-1,2,1)$ *c.* $R(0,3,0)$ *d.* $S(-2,2\sqrt{3},4)$ Sol. *a.* $P(2,0^\circ, 90^\circ)$ *b.* $Q(\sqrt{6}, 117^\circ, 66^\circ)$, *c.* $R(3\sqrt{2}, 315^\circ, 7)$, *d.* $S(3, 90^\circ, 90^\circ)$.
6. En los siguientes ejercicios, se dan las coordenadas esféricas (r, θ, φ) de un punto. Calcular las coordenadas rectangulares (x, y, z) del punto correspondiente. *a.* $P(3,0,\pi)$ *b.* $Q\left(1, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right)$ *c.* $R\left(12, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$ *d.* $S\left(3, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}\right)$. Sol. *a.* $P(3,0,0,0,0)$ *b.* $Q(0.4,0.3,0.9)$ *c.* $R(6.0,6.0,8.5)$ *d.* $S(1.1,1.1,2.6)$.
7. En los siguientes ejercicios, se dan las coordenadas cartesianas (x, y, z) de un punto, calcular las coordenadas cilíndricas (r, θ, z) del punto correspondiente. *a.* $P(1, \sqrt{3}, 2)$ *b.* $Q(1,1,5)$ *c.* $R(3, -3,7)$ *d.* $S(-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 4)$. Sol. *a.* $P(2, 72^\circ, 2)$ *b.* $Q(\sqrt{2}, 45^\circ, 5)$ *c.* $R(3\sqrt{2}, 315^\circ, 7)$ *d.* $S(4, 315^\circ, 2)$

CAPITULO 02

FUNCIONES VECTORIALES DE UN PARÁMETRO



Funciones vectoriales de un parámetro

En el capítulo anterior se estudiaron funciones escalares de variable vectorial que se presentaron como una generalización de las funciones escalares de variables vistas en los cursos tomados de Matemática y Física (operaciones con magnitudes escalares y vectoriales, reglas de derivación e integración, etc.) En este capítulo se presentarán las funciones vectoriales, como una generalización de las funciones escalares vistas para describir magnitudes físicas; ecuaciones paramétricas que nos permite representar curvas y superficies en el plano o en el espacio; derivación e integración de funciones vectoriales (incluyendo las reglas de múltiplo constante, producto, cociente y cadena), y finalmente aplicaciones en Matemática como la determinación de propiedades en objetos geométricos (longitud de una curva paramétrica, vector tangente, vector normal, curvatura, etc.) y en Física en cinemática y dinámica de la partícula, intensidad y la dirección de fuerzas como la gravitatoria o la fuerza electromagnética, entre otros campos.

El objetivo general del presente capítulo es aplicar las diferentes propiedades de las funciones de varias variables referido al análisis de derivadas parciales y diferenciales en situaciones o problemas que describen variaciones y cambios.

Prerrequisitos para abordar este tema.

La base teórica necesaria para el estudio de este capítulo es la siguiente:

- Aplicar los conceptos, propiedades y procedimientos asociados a las nociones de límites y continuidad, en la resolución de ejercicios y problemas matemáticos de una función real de variable real.
- Calcular la derivada de funciones de variable real usando diferentes técnicas de derivación.
- Aplicar los conceptos y propiedades de asíntotas, intervalos de monotonía e intervalos de concavidad, razón de cambio relacionadas, optimización de funciones y la regla de L'Hôpital.
- Calcular la integral indefinida y definida de funciones de variable real usando diferentes métodos de integración.

- Determinar el área de regiones planas, volúmenes de sólidos de revolución, centros de masa de láminas delgadas y homogéneas de entorno real.

Se recomienda buscar información para iniciar y orientar los repasos antes de abordar cada tema.

2.1. Introducción

En esta unidad se tratará con las funciones vectoriales, estudiando su dominio, rango y representación gráfica, para lo cual es preciso tener un buen manejo de los conjuntos del plano y del espacio que se han tratado en la unidad anterior. Posteriormente se presenta ejercicios relacionados con el cálculo de límites bidimensionales, la continuidad de funciones, la integral de una función vectorial de un parámetro y se revisa las características específicas de las curvas definidas por estas funciones, lo cual incluye la determinación de la longitud de una curva parametrizada y el análisis de vectores unitarios como la tangente, normal principal y Binormal, finalmente, se tratan conceptos como el vector curvatura y radio de curvatura, así como la comprensión de los planos osculador, normal y rectificante asociados a una curva en el espacio.

2.2. Ecuaciones paramétricas y funciones vectoriales de un parámetro

2.2.1. Curvas paramétricas

Las ecuaciones paramétricas posibilitan una gran variedad de curvas, que van desde ser simples a complejas y en algunos casos ser simétricas; estas curvas se generan cuando las variables x y y se expresan en función de una tercera variable llamada parámetro. En gráficos en 2D se suele usar el parámetro t y en gráficos 3D los parámetros son u y v . Si x y y se dan como funciones de una tercera variable t (parámetro) mediante las ecuaciones paramétricas $x = f(t)$ y $y = g(t)$, entonces cada valor de t determina un punto (x, y) que se puede

representar en un sistema de coordenadas. Cuando t varía, el punto $(x, y) = (f(t), g(t))$ varía y genera una curva paramétrica C .

Ejemplo 2.1. Dadas las ecuaciones paramétricas $\begin{cases} x = t^2 - 2t \\ y = t + 1 \end{cases}$, con t real, describir y graficar la curva para los siguientes casos:

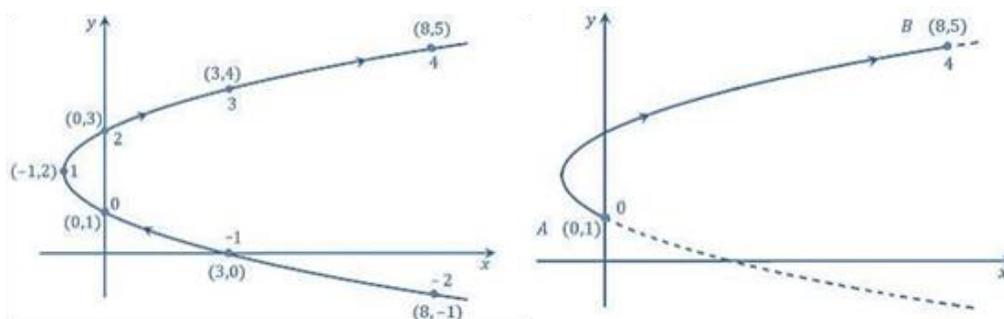
Solución

a. Si $t \in (-\infty, +\infty)$; b. Si $t \in [0, 4]$.

En este caso se tiene, $f(t) = t^2 - 2t$ y $g(t) = t + 1$. En el caso (a), para cada valor del parámetro $t \in \mathbb{R}$, existe un punto de la curva, es decir, si $t = 0$ se tiene $x = f(0) = 0$ y $y = g(0) = 1$, por tanto, un punto de la curva en $t = 0$ es $(0,1)$. Podemos así evaluar x y y para varios valores del parámetro, por ejemplo, asignar a t los valores $-2, -1, 1, 2, \dots$, y luego situar los puntos $(f(t), g(t))$ en el plano. Uniendo estos puntos se genera la curva continua de la figura 32 (a), en la que las flechas indican el sentido en el que se van generando los puntos de la curva a medida que t aumenta su valor. Para el caso (b), $t \in [0, 4]$, la curva paramétrica es ahora la parte de la parábola $x = y^2 - 4y + 3$ que empieza en el punto que corresponde al valor $t = 0$ del parámetro, o sea $A(0,1)$, y termina en el punto que corresponde a $t = 4$, ósea $B(8,5)$, como se muestra en la figura 32 (b). La flecha señala el sentido de recorrido de la curva cuando el parámetro aumenta su valor desde $t = 0$ hasta $t = 4$.

Figura 32

Parámetro t



Nota: (a) El parámetro $t \in \mathbb{R}$ (b) El parámetro $t \in [0, 4]$. Autor (2024)

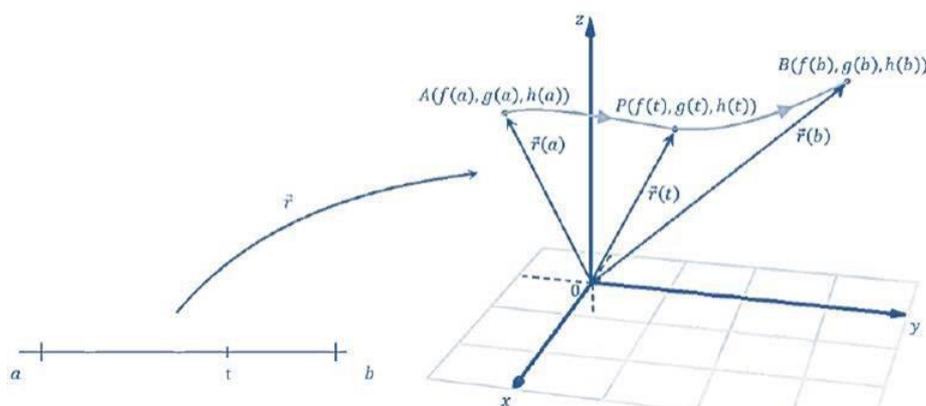
Si se considera un objeto que se mueve en el espacio a través de un camino imaginario representado por una curva en el espacio, entonces, se tendrá tres funciones del tiempo, f , g y h , que permiten escribir las coordenadas de la posición del objeto en cada instante t mediante las siguientes ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \\ z = h(t) \end{cases}$$

Se observa que, para cada t , el punto $P(f(t), g(t), h(t))$ se obtiene la posición del objeto en el tiempo t . Es decir, si se toma el vector que va de O a P , para cada t (figura 33). Esto sugiere que una curva paramétrica puede ser descrita mediante una función que a cada valor del parámetro t le asigna el vector $\mathbf{r}(t) = OP = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$, esto es, se tiene una función con valores vectoriales.

Figura 33

Si el parámetro t varía en $[a, b]$, el punto final del vector $\mathbf{r}(t)$ genera una curva en el espacio



Nota: Autor (2024)

Definición. Una función vectorial, es una función cuyo rango o imagen es un conjunto de vectores. Se representa por $\mathbf{r}(t)$, cuyo dominio puede ser un intervalo cerrado, abierto o semiabierto o todo \mathbb{R} , y su rango está formado por vectores en el plano o en el espacio. Una función vectorial puede representarse como sigue: $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), h(t))$ en el espacio, o por $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ en el plano.

A continuación, se destacan algunas características de las funciones vectoriales:

- Las funciones escalares $x(t), y(t), z(t)$ son las componentes del vector $r(t)$.
- Conforme el parámetro t varía en su dominio, el punto extremo o final del vector $r(t)$ genera una curva C llamada curva paramétrica.
- El sentido de la curva paramétrica C corresponde al sentido en el que se van generando los puntos de la curva cuando el parámetro t aumenta su valor en el dominio $I \subset \mathbb{R}$.
- El dominio del parámetro t en el intervalo I , puede estar restringido a un intervalo finito $[a, b] \subset \mathbb{R}$. En este caso, la curva C tiene un punto inicial o de partida $A(f(a), g(a), h(a))$ (que es el punto extremo del vector $r(a)$) y un punto final o de llegada $B(f(b), g(b), h(b))$ (que es el punto extremo del vector $r(b)$).
- Una curva C , parametrizada por la función vectorial $r(t)$, con $a \leq t \leq b$, es cerrada si su punto final coincide con su punto inicial, esto es, si $r(a) = r(b)$.

Ejemplo 2.2. El movimiento de un objeto se define por la siguiente función vectorial: $r(t) = 3\cos(t)i + 3\sin(t)j, 0 \leq t \leq 2\pi$.

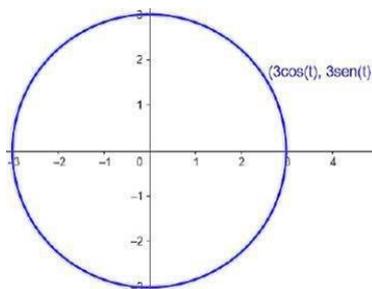
Se pide graficar la trayectoria que describe el objeto, indicando el punto inicial y final, así como el sentido del recorrido.

Solución

Las funciones componentes son $x(t) = 3 \cos t$ y $y(t) = 3 \sin t$. Si para algunos valores de t situamos en el plano los puntos $P(x(t), y(t))$, su lugar geométrico es una circunferencia, lo cual se obtiene al eliminar el parámetro t entre las ecuaciones paramétricas, o sea, $x^2(t) = (3\cos t)^2, y^2(t) = (3\sin t)^2$, por tanto, se tiene, $9\cos^2 t + 9\sin^2 t = 9$, o sea, $x^2 + y^2 = 9$. El punto inicial de la curva es $A(3,0)$ y a medida que el parámetro aumenta desde 0 hasta 2π , el punto $P(4 \cos t, 4 \sin t)$ da una vuelta a la circunferencia en sentido contrario al movimiento de las agujas de un reloj, y como punto final es $B(3,0)$ para $t = 2\pi$

Figura 34

Curva paramétrica de $r(t) = 3\cos(t)i + 3\sin(t)j, 0 \leq t \leq 2\pi$



Nota: Autor (2024)

La trayectoria, en este caso, es cerrada y corresponde a una vuelta a la circunferencia.

Ejemplo 2.3. Sea la recta L que pasa por los puntos $A(4, 3, 2)$ y $B(-1, -2, 3)$. Determinar una función vectorial que la parametric.

Solución

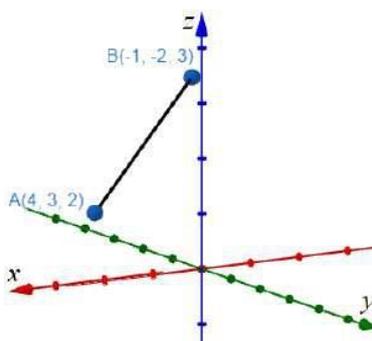
En el capítulo anterior, se definieron las ecuaciones que permiten construir algunos objetos geométricos (recta, plano, etc.), y para el caso particular se considera el punto $A(4,3,2) \in L$ y a $AB = (-5, -5, 1)$ como un vector director para L , luego se tiene que para t real:

$$\begin{cases} x = 4 - 5t \\ y = 3 - 5t \\ z = 2 + t \end{cases}$$

Por tanto, $r(t) = (4 - 5t)i + (3 - 5t)j + (2 + 4t)k, t \in R$ es una representación de L mediante una función vectorial.

Figura 35

Recta orientada que va desde A hasta B



Nota: Autor (2024)

Ejemplo 2.4. Determinar una función vectorial para el segmento rectilíneo orientado que va desde el punto $P_0(1,3,-2)$ hasta el punto $P_1(4,0,3)$.

Solución

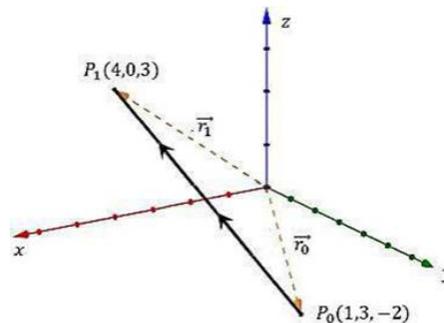
A partir de la ecuación que describe la recta que pasa por dos puntos, se tiene,
 $r(t) = r_0 + t(r_1 - r_0), 0 \leq t \leq 1$

Siendo P_0 el punto de referencia por donde pasa la recta, $r_0 = OP_0$ y $r_1 = OP_1$, luego el vector director es $P_0P_1 = r_1 - r_0$, por tanto, se tiene lo siguiente,

$$r(t) = (1 - t)(1,3,-2) + t(4,0,3) = (1,3,-2) + t(3,-3,1), 0 \leq t \leq 1$$

Figura 36

Segmento orientado que va desde P_0 hasta P_1



Nota: Autor (2024)

Ejemplo 2.5. Trazar la curva paramétrica determinada por la función vectorial
 $r(t) = 3\cos t i + 3\sin t j + tk$

Solución

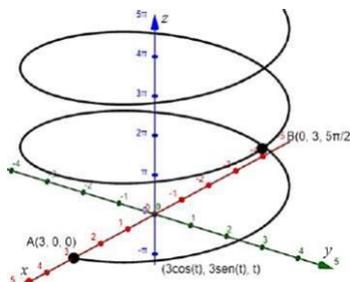
Las componentes escalares de $r(t)$ son $f(t) = 3\cos t, g(t) = 3\sin t, h(t) = t$, y están definidas para todos los valores reales de t . La curva descrita por $r(t)$ es una hélice que se desarrolla en la superficie del cilindro circular recto de eje z y radio 3, o sea: $x^2 + y^2 = 9$. En efecto, la curva está sobre dicho cilindro ya que las componentes $f(t)$ y $g(t)$ satisfacen la ecuación de la superficie cilíndrica: $x^2 + y^2 = [f(t)]^2 + [g(t)]^2 = 9\cos^2 t + 9\sin^2 t = 9$. Además, la curva “sube” sobre el cilindro a medida que la componente $h(t) = 4t$ aumenta.

Las funciones componentes en x e y tienen una periodicidad de 2π , o sea, cada vez que t aumenta su valor en 2π , la curva completa una vuelta alrededor del cilindro. Pero no vuelve al mismo punto: la distancia (en este caso vertical) entre

dos puntos de una hélice que corresponden a una vuelta (en este caso por un cambio de 2π en el parámetro), se llama paso de la hélice, el cual corresponde a $h = (1)(2\pi) = 2\pi \approx 6.28$.

Figura 37

Hélice circular de eje z , radio 3 y paso 2π



Nota: Autor (2024)

Ejemplo 2.6. Representar mediante una función vectorial la curva intersección de las superficies en el intervalo del parámetro dado.

$$x^2 + y^2 = 4, y + z = 3, t \in [0, 2\pi]$$

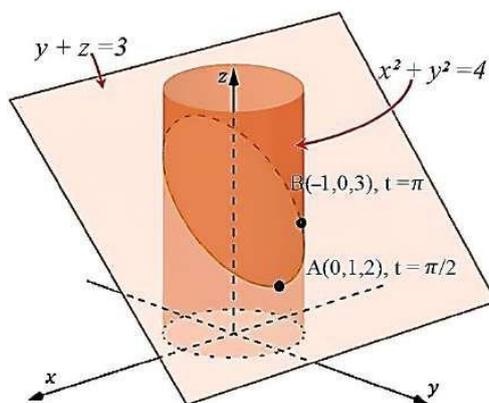
Solución

Considerando las funciones componente $x(t) = \cos t, y(t) = \sin t$ se satisface la ecuación del cilindro $x^2 + y^2 = 4$. Usando ahora la ecuación del plano tenemos que $z = 3 - y$, luego $z(t) = 3 - y(t)$. Por tanto, una parametrización de la curva intersección corresponde a:

$$r(t) = \cos t i + \sin t j + (3 - \sin t) k, t \in [0, 2\pi]$$

Figura 38

Intersección entre un cilindro circular y un plano oblicuo



Nota: Autor (2024)

Ejemplo 2.7. Representar mediante una función vectorial la curva intersección de las superficies empleando el parámetro respectivo.

$$x^2 + y^2 = 9, z = x^2, \text{ parámetro } x = 3 \text{ sen } t$$

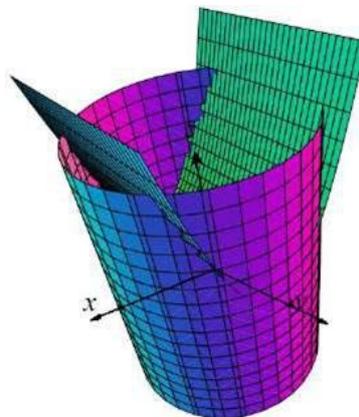
Solución

A partir de las relaciones dadas, se tiene lo siguiente, $x = 3 \text{ sen } t$, por tanto, $z = 3 \text{ sen}^2 t$ mientras que $x^2 + y^2 = 9$ con lo cual, $y = \sqrt{9 - 9 \text{ sen}^2 t} = 3 \text{ cost}$. Por lo tanto, la función vectorial que representa la curva intersección entre una superficie cilíndrica y una superficie parabólica corresponde a,

$$f(t) = (3 \text{ sen } t, 3 \text{ cost}, 3 \text{ sen}^2 t)$$

Figura 39

Intersección entre un cilindro circular y una superficie parabólica



Nota: Autor (2024)

Ejemplo 2.8. Graficar y parametrizar la curva definida por la parábola $y = x^2/3$, y la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$, también determinar si se cortan. En caso afirmativo, indicar los valores de los parámetros y los puntos de cruce y/o de encuentro.

Solución

Al parametrizarse la parábola se tiene, $r_1(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}/3$, mientras que para la circunferencia podemos usar $r_2(t) = 2 \cos t\mathbf{i} + 2 \text{ sen } t\mathbf{j}$, $t \in [0, 2\pi]$, y se observa que ambas curvas se cortan en dos puntos, ubicados en el primer y segundo cuadrantes. Para hallarlos de manera analítica buscamos dónde coinciden las coordenadas de los puntos de ambas curvas, planteando la igualdad: $r_1(t) =$

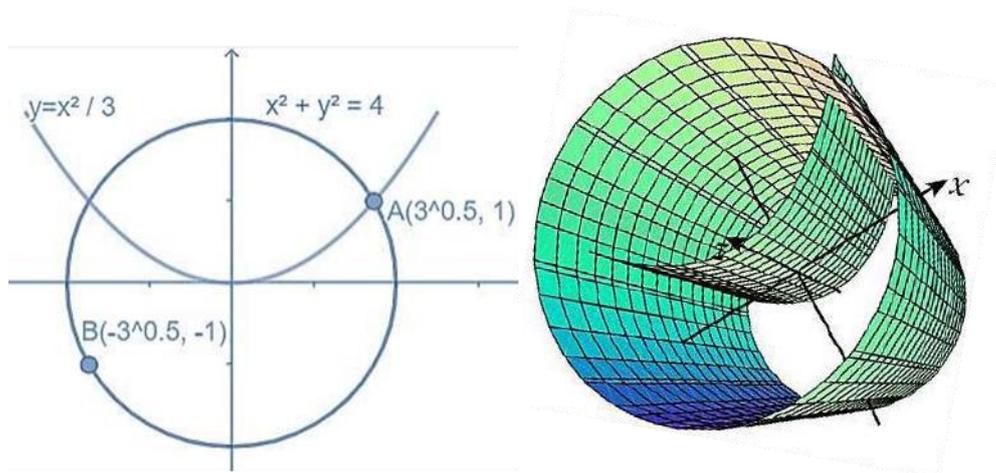
$r_2(t)$, ello implica lo siguiente, $\begin{cases} x = 2\cos t \\ \frac{t^2}{3} = 2\sin t \end{cases}$ efectuando operaciones algebraicas,

esto nos conduce a, $9x^2 + x^4 = 36$

Cuyas raíces reales son, $x = \pm\sqrt{3}$. Las soluciones para t dentro del intervalo paramétrico son, respectivamente, $t = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$. Luego, los dos puntos donde la parábola y la circunferencia se cruzan corresponden a, $A(\sqrt{3}, 1), B(-\sqrt{3}, -1)$

Figura 40

Intersección entre un cilindro circular y una superficie parabólica



Nota: Autor (2024)

2.3. Límites y derivadas de funciones vectoriales

2.3.1. Funciones vectoriales

Una función vectorial de una variable real en el espacio es una función cuyo dominio es un conjunto de números reales y cuyo rango es un conjunto de vectores del espacio, es decir, es una función del tipo $r: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, t \rightarrow r(t) = f(t)i + g(t)j + h(t)k, t \in \mathbb{R}$

Donde $f(t), g(t), h(t)$ son funciones reales de variable real en t , llamadas funciones componentes de $r(t)$.

Nota: Si la función vectorial $r(t)$ describe el movimiento de una partícula, el vector $r(t) = f(t)i + g(t)j + h(t)k$ señala su posición en el instante t , en

estos casos t representa la variable tiempo, por ejemplo, $\mathbf{r}(t) = (2 - t)\mathbf{i} + (1 + t)\mathbf{j} + (-2 + t)\mathbf{k}$

- Dominio de una función vectorial

Esta dado por la intersección de los dominios de sus funciones componentes, es decir, dado $\mathbf{r}(t) = (f(t), g(t), h(t))$ entonces, $I = \text{Dom } \mathbf{r}(t) = \text{Dom } f(t) \cap \text{Dom } g(t) \cap \text{Dom } h(t)$.

Por ejemplo, si $\mathbf{r}(t) = (1 + t^2, \ln t, \sqrt{t})$, el dominio de \mathbf{r} será: $I = \{t \in \mathbb{R} / t > 0\}$

Ejemplo 2.9. Hallar el dominio de la función vectorial $\mathbf{f}(t) = (\frac{t^2}{(2+t)}, 2t^3, (\frac{2t}{(1+t)}))$.

Solución

$\text{Def } \mathbf{f}(t) = (f(t), g(t), h(t))$, entonces, $f(t) = t^2 / (2 + t)$, $g(t) = t^3$, $h(t) = 2t / (1 + t)$,

$$f(t) = \frac{t^2}{(2 + t)}, \text{Dom } f(t) = \mathbb{R} - \{-2\}$$

$$g(t) = \frac{t^2}{(2 + t)}, \text{Dom } f(t) = \mathbb{R}$$

$$h(t) = \frac{2t}{(1 + t)}, \text{Dom } f(t) = \mathbb{R} - \{-1\}$$

$$\text{Dom } \mathbf{f}(t) = \text{Dom } f(t) \cap \text{Dom } g(t) \cap \text{Dom } h(t) = \mathbb{R} - \{-2, -1\}$$

- Rango de una función vectorial

El rango o recorrido de una función son todos los valores que la función devuelve después de haber introducido todos los valores del dominio, y realizando las trazas en cada plano se define el intervalo de la variable en referencia. Es decir,

$$\text{Rng } \mathbf{f}(t) = \{z(t) = f(x(t), y(t)): (x(t), y(t)) \in \text{Dom } \mathbf{f}(t) \subset \mathbb{R}\}$$

Ejemplo 2.10. Hallar el rango de la función vectorial $\mathbf{f}(t) = (2 + t, t^2 + 1)$.

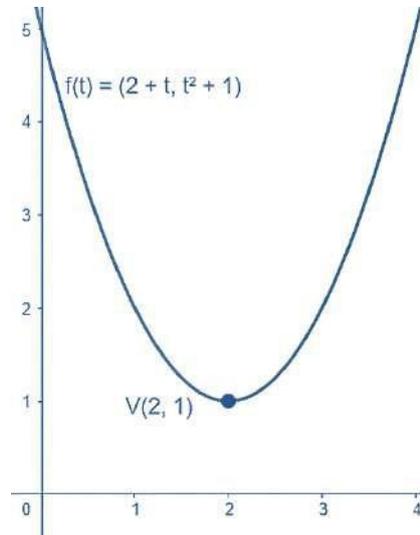
Solución

Del ejercicio en referencia se tiene, $\mathbf{f}(t) = (x, y) = (2 + t, t^2 + 1)$, por tanto, $x = 2 + t$, despejando t , $t = x - 2$, y reemplazando en $y = t^2 + 1$, se tiene,

$y = (x - 2)^2 + 1$, o sea, $y - 1 = (x - 2)^2$, que corresponde a una parábola de vértice $V(2,1)$ función escalar que admite como rango el intervalo de $Rng = [1, +\infty)$, o sea,

Figura 41

Rango de la función $f(t) = (2 + t, t^2 + 1)$



Nota: Autor (2024)

Ejemplo 2.11. Hallar el dominio, rango y gráfica de la función vectorial $f(x, y) = \sqrt{16 - 4x^2 - y^2}$

Solución

En primer lugar, se establece que el radicando no debe ser negativo, es decir,

$$\text{Dom } f(x, y) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: 16 - 4x^2 - y^2 \geq 0\}$$

$$\text{Dom } f(x, y) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x^2/4 + y^2/16 \leq 1\}$$

Luego, para $z = 0$, la traza en el plano xy , establece el dominio siguiente,

$$\text{Dom } f(x, y) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: -2 \leq x \leq 2, -4 \leq y \leq 4, z = 0\}$$

Además, del análisis del dominio, se tiene que, para el rango de la función,

$$\text{Rng } f(x, y) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: 0 \leq z \leq 4, x = 0, y = 4\}$$

$$\text{Rng } f(x, y) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: 0 \leq z \leq 4, x = 2, y = 0\}$$

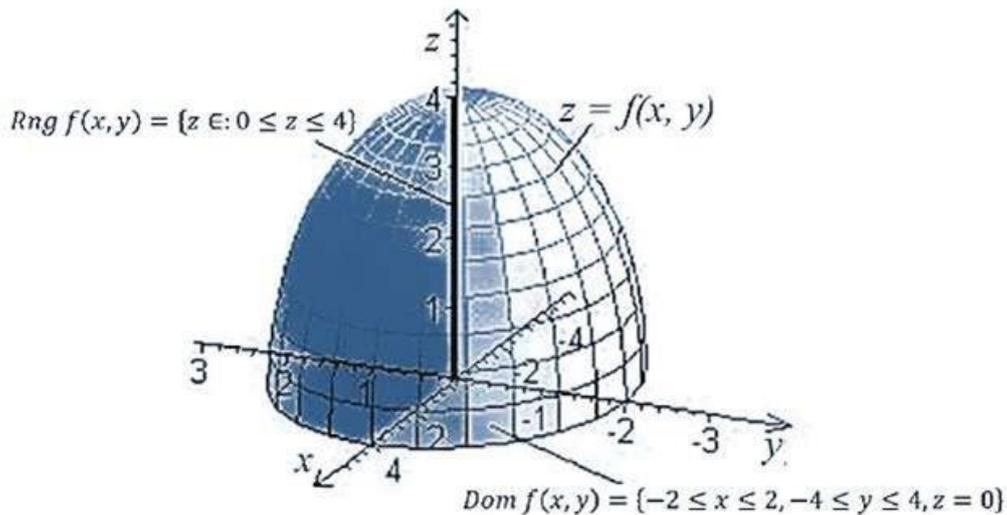
Es decir, el cálculo del rango de la función se tiene,

$$\text{Rng } f(x, y) = \{x, y, \sqrt{16 - 4x^2 - y^2}: (x, y) \in \text{Dom } f\} = \{z \in: 0 \leq z \leq 4\}$$

Reescribiendo la expresión, $f(x,y) = z = \sqrt{16 - 4x^2 - y^2}$, esta puede definirse por, $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{16} = 1$, el cual corresponde a la mitad superior de un elipsoide, o sea,

Figura 42

Dominio, rango y gráfica de la función $z = \sqrt{16 - 4x^2 - y^2}$



Nota: Autor (2024)

2.3.2. Límite y continuidad de una función vectorial

El concepto de límite de una función de variable real se lo aplica en las funciones vectoriales de variable real, luego, de la definición de límite de una función de una variable:

Se dice que un número L es el límite de la función $f(x)$ en a si para cada $\varepsilon > 0$, hay un número $\delta > 0$, tal que siempre que $x \in Dom f(x)$, y $0 < |x - a| < \delta$, entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$, por tanto, por analogía se tiene que, si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$,

$\lim_{t \rightarrow a} r(t) = PQ$, luego, para la función vectorial $r: I \subseteq \mathbb{R}^3, t \rightarrow r(t) = f(t)i +$

$g(t)j + h(t)k, t \in \mathbb{R}$ se define, $\lim_{t \rightarrow a} r(t) = \left\{ \lim_{t \rightarrow a} f(t), \lim_{t \rightarrow a} g(t), \lim_{t \rightarrow a} h(t) \right\}$, siempre que existan los límites de las funciones componentes.

- Propiedades de los límites de funciones vectoriales

Si $f(t)$ y $g(t)$ son funciones vectoriales de variable real tal que $\lim_{t \rightarrow a} f(t) = a$ y

$\lim_{t \rightarrow a} g(t) = b$ y t_0 es un punto del $Dom f(t) \cap Dom g(t)$, entonces,

- $\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = a, \lim_{t \rightarrow t_0} \varphi(t) = k$, entonces $\lim_{t \rightarrow t_0} \varphi(t)f(t) = ka$
- $\lim_{t \rightarrow t_0} (f(t) \pm g(t)) = \lim_{t \rightarrow t_0} f(t) \pm \lim_{t \rightarrow t_0} g(t) = a \pm b$
- $\lim_{t \rightarrow t_0} (f(t) \cdot g(t)) = \lim_{t \rightarrow t_0} f(t) \cdot \lim_{t \rightarrow t_0} g(t) = a \cdot b$
- $\lim_{t \rightarrow t_0} (f(t) \times g(t)) = \lim_{t \rightarrow t_0} f(t) \times \lim_{t \rightarrow t_0} g(t) = a \times b$

Ejemplo 2.12. Hallar el límite de la función vectorial siguiente

$$\lim_{t \rightarrow 3} f(t) = \left(-\frac{t^2 - 2t - 3t^2 - 5t + 6}{-t - 3, t - 3} \right)$$

Solución

Se analiza el límite de las funciones componentes, o sea,

$$\lim_{t \rightarrow 3} f(t) = \frac{\lim_{t \rightarrow 3} (t^2 - 2t - 3)}{\lim_{t \rightarrow 3} (t - 3)} = \lim_{t \rightarrow 3} (t + 1) = 4$$

$$\lim_{t \rightarrow 3} g(t) = \frac{\lim_{t \rightarrow 3} (t^2 - 5t + 6)}{\lim_{t \rightarrow 3} (t - 3)} = \lim_{t \rightarrow 3} (t - 2) = 1, \text{ por tanto, } \lim_{t \rightarrow 3} f(t) = (4, 1)$$

Ejemplo 2.13. Calcular el límite de la función vectorial siguiente

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left[\left(\frac{1}{1+t} \right)^{\frac{1}{t}}, \frac{t^3 - t}{t}, \frac{\sqrt{1-t} - \sqrt{1+t}}{t} \right]$$

Solución

Se analiza el límite de las funciones componentes, o sea,

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{1}{1+t} \right)^{\frac{1}{t}} = \lim_{t \rightarrow 0} \left(1 + \frac{-t}{1+t} \right)^{\frac{1+t}{-t}} = e^{\lim_{t \rightarrow 0} \frac{-1}{1+t}} = e^{-1}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} g(t) = \lim_{t \rightarrow 0} (t^2 - 1) = -1$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} h(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{1-t} - \sqrt{1+t}}{t} \right) \left(\frac{\sqrt{1-t} + \sqrt{1+t}}{\sqrt{1-t} + \sqrt{1+t}} \right) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-2}{\sqrt{1-t} + \sqrt{1+t}} = -1$$

Por tanto, el límite de la función vectorial es, $(e^{-1}, -1, -1)$

Ejemplo 2.14. Hallar la continuidad de la función vectorial siguiente:

$$f(t) \begin{cases} \left(\frac{t^2 - 1}{t - 1}, t^3 \right), & \text{si } t \neq 1 \\ (2, 1), & \text{si } t = 1 \end{cases}$$

Solución

$$\lim_{t \rightarrow 1} f(t) = \lim_{t \rightarrow 1} \left(\frac{t^2 - 1}{t - 1}, t^3 \right) = \left[\lim_{t \rightarrow 1} \left(\frac{t^2 - 1}{t - 1} \right), \lim_{t \rightarrow 1} t^3 \right] = (2, 1) = f(1)$$

Como $\lim_{t \rightarrow 1} f(t) = f(1)$, entonces $f(t)$ es continua en $t = 1$

Ejemplo 2.15. Hallar la continuidad de la función vectorial siguiente:

$$r(t) = (1 + et)i + sentj + (t^2 - e^{-2t})k, t = 0$$

Tomando uno a uno las componentes de la función vectorial, se tiene,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} f(t) &= \lim_{t \rightarrow 0} (1 + 3t) = 0, \lim_{t \rightarrow 0} g(t) = \lim_{t \rightarrow 0} sent = 0, \lim_{t \rightarrow 0} h(t) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} (t^2 - e^{-2t}) = -1 \end{aligned}$$

Por tanto, $\lim_{t \rightarrow 0} r(t) = (0, 0, -1)$

Por otra parte, si a $\in I$ se dice que $r(t)$ es continua en a si $\lim_{t \rightarrow a} r(t) = r(a)$, y recordando las definiciones de límite y continuidad de cursos previos de cálculo, resulta que la función vectorial $r(t) = f(t)i + g(t)j + h(t)k$ es continua en a si y solo si sus funciones componentes $f(t), g(t), h(t)$ son continuas en a.

Ejemplo 2.16. Determinar si la función vectorial dada es continua.

$$b. f(t) = \begin{cases} \left(t, t^2, \frac{sent}{t} \right) \\ (0, 0, 1), & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

Solución

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \left(t, t^2, \frac{sent}{t} \right) = (0, 0, 1) = f(0)$$

Como $\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = f(0)$, entonces $f(t)$ es continua en $t = 0$

2.4. Derivadas de una función vectorial de un parámetro

Definición. Sea $f(t)$ una función vectorial, entonces, se define su derivada $f'(t)$ como sigue,

$$f'(t) = \lim_{t \rightarrow a} \frac{r(t + \Delta t) - r(t)}{\Delta t}$$

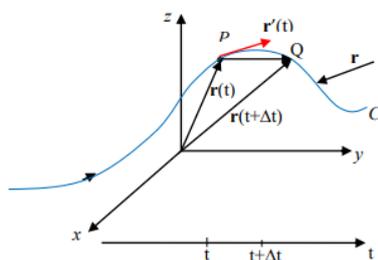
siempre que este límite exista.

2.4.1. Interpretación geométrica de la derivada de una función vectorial

Supongamos que $r(t)$ sea el vector posición del punto P y el vector $r(t + \Delta t)$ posición del punto Q, entonces $PQ = r(t + \Delta t) - r(t)$ se puede considerar como un vector secante a la curva C. Si $\Delta t > 0$ el vector $\frac{1}{\Delta t}(r(t + \Delta t) - r(t)) = \frac{1}{\Delta t}PQ$ tiene la misma dirección y sentido que el vector PQ, entonces cuando $\Delta t > 0$ el vector $\frac{1}{\Delta t}PQ$ se aproxima a un vector que está en la recta tangente a la curva C en el punto P. Al vector $r'(t)$ se lo denomina vector tangente a la curva C en el punto P, siempre que $r'(t)$ exista y $r'(t) \neq 0$.

Figura 43

Interpretación geométrica de la derivada de una función



Nota: Autor (2024)

2.4.2. Teorema para el cálculo de $r'(t)$

Sea la función vectorial $r(t) = f(t)i + g(t)j + h(t)k = (f(t), g(t), h(t))$ con $t \in I$ tal que $f(t)$, $g(t)$ y $h(t)$ son funciones derivables en I entonces se cumple,

$$r'(t) = f'(t)i + g'(t)j + h'(t)k = (f'(t), g'(t), h'(t))$$

Demostración:

$$\begin{aligned}
 r'(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{r(t + \Delta t) - r(t)}{\Delta t} = \\
 &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} [(f(t + \Delta t), g(t + \Delta t), h(t + \Delta t)) - (f(t), g(t), h(t))] = \\
 &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} [f(t + \Delta t) - f(t), g(t + \Delta t) - g(t), h(t + \Delta t) - h(t)] = \\
 &= \left(\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}, \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{g(t + \Delta t) - g(t)}{\Delta t}, \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{h(t + \Delta t) - h(t)}{\Delta t} \right) = \\
 &= (f'(t), g'(t), h'(t))
 \end{aligned}$$

Ejemplo 2.17. Hallar la derivada y el vector tangente unitario de la función vectorial siguiente $r(t) = \cos t i + \sin t j + t k = (\cos t, \sin t, t)$ con $t \in \mathbb{R}$

Solución

Aplicando la operación derivada en cada una de las funciones componentes se tiene, $r'(t) = (-\sin t, \cos t, 1)$, que al ser evaluado en el punto $t = 0$, se tiene, $r'(0) = (-\sin 0, \cos 0, 1) = (0, 1, 1)$ A su vez el vector tangente unitario corresponde a,

$$T_u(0) = \frac{r'(0)}{|r'(0)|} = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 1)$$

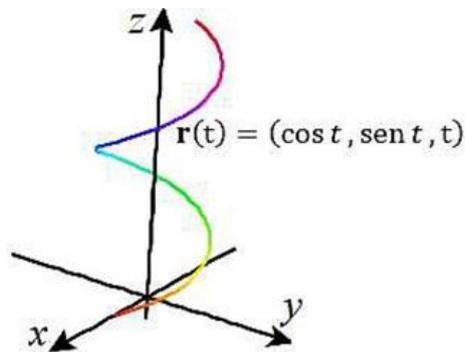
Las ecuaciones paramétricas de la recta tangente a la hélice en el punto $P(1,0,0)$ son:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = t, \text{ siendo } t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{cases}$$

Como se muestra a continuación, la gráfica de la función vectorial corresponde a una hélice:

Figura 44

Hélice circular de eje z, radio 1 y paso 2π



Nota: Autor (2024)

2.5. Reglas de derivación entre funciones vectoriales

Sean r y u funciones vectoriales derivables, c un escalar y f una función real derivable. Entonces se tiene las siguientes reglas de derivación

- Múltiplo escalar: $\frac{d}{dt}[cr(t)] = cr'(t)$
- Múltiplo escalar: $\frac{d}{dt}[r(t) \pm u(t)] = r'(t) \pm u'(t)$
- Múltiplo escalar: $\frac{d}{dt}[f(t)r(t)] = f'(t)r(t) + f(t)r'(t)$
- Múltiplo escalar: $\frac{d}{dt}[r(t) \cdot u(t)] = r'(t) \cdot u(t) + r(t) \cdot u'(t)$
- Múltiplo escalar: $\frac{d}{dt}[r(t) \times u(t)] = r'(t) \times u(t) + r(t) \times u'(t)$
- Múltiplo escalar: $\frac{d}{dt}[r(f(t))] = r'(f(t))f'(t)$

Ejemplo 2.18. Demostrar las siguientes reglas de derivación entre funciones vectoriales.

- $[f(t) \cdot r(t)]'$
- $[r(t) \times u(t)]'$

Para el caso (a) se tiene,

$$[f(t) \cdot r(t)]' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h)r(t+h) - f(t)r(t)}{h}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h)r(t+h) - f(t)r(t) + f(t)r(t+h) - f(t)r(t)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f(t+h)f(t))r(t+h) + f(t)(r(t+h) - r(t))}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f(t+h) - f(t))}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t)(r(t+h) - r(t))}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f(t+h) - f(t))}{h} r(t+h) + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(r(t+h) - r(t))}{h} f(t) \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f(t+h) - f(t))}{h} \lim_{h \rightarrow 0} r(t+h) + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(r(t+h) - r(t))}{h} \lim_{h \rightarrow 0} f(t) \\
 &= f'(t)r(t) + f(t)r'(t)
 \end{aligned}$$

Para el caso (b), se tiene,

$$\begin{aligned}
 (r(t) \times u(t))' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(r(t+h) - r(t))}{h} \times u(t+h) + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(u(t+h) - u(t))}{h} \times r(t) \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(r(t+h) - r(t))}{h} \times \lim_{h \rightarrow 0} u(t+h) + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(u(t+h) - u(t))}{h} \times \lim_{h \rightarrow 0} r(t) \\
 &= r'(t) \times u(t) + r(t) \times u'(t)
 \end{aligned}$$

Ejemplo 2.19. Dadas las funciones vectoriales $r(t) = (6t + 8)\mathbf{i} + (4t^2 + 2t - 3)\mathbf{j} + 5t\mathbf{k}$ y $u(t) = (t^2 - 3)\mathbf{i} + (2t + 4)\mathbf{j} + (t^3 - 3t)\mathbf{k}$.

Hallar:

- $\frac{d}{dt}[r(t) \cdot u(t)]$
- $\frac{d}{dt}[u(t) \times u'(t)]$

Solución

Para el caso (a), se tiene, $r'(t) = 8\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ y $u'(t) = 2t\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + (3t^2 - 3)\mathbf{k}$ o sea,

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt}[r(t) \cdot u(t)] &= (6\mathbf{i} + (8t + 2)\mathbf{j} + 5\mathbf{k}) \cdot ((t^2 - 3)\mathbf{i} + (2t + 4)\mathbf{j} + (t^3 - 3t)\mathbf{k}) \\
 &+ ((6t + 8)\mathbf{i} + (4t^2 + 2t - 3)\mathbf{j} + 5t\mathbf{k}) \cdot (2t\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + (3t^2 - 3)\mathbf{k}) \\
 &= 20t^3 + 42t^2 + 26t - 16.
 \end{aligned}$$

Para el caso (b), se tiene, $\frac{d}{dt} [[u(t) \times u'(t)] = u'(t) \times u'(t) + u(t) \times u''(t) = u(t) \times u''(t)]$

$$u''(t) = \frac{d}{dt} 2ti + 2j + (3t^2 - 3)k = 2i + 6tk$$

Por lo tanto, $\frac{d}{dt} [u(t) \times u'(t)] = 0 + ((t^2 - 3)i + (2t + 4)j + (t^3 - 3t)k) \times (2i + 6tk)$

$$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ t^2 - 3 & 2t + 4 & t^3 - 3t \\ 2 & 0 & 6t \end{vmatrix}$$

$$= 6t(2t + 4)i - (6t(t^2 - 3) - 2((t^2 - 3))j - 2(2t + 4)k$$

$$= (12t^2 + 24t)i + (12t - 4t^3) - (4t + 8)k$$

Ejemplo 2.20. Dadas las funciones vectoriales $r_1(t) = (5t^2, t, -t^3)$ y $r_2(t) = (\sin t, -\cos t, 0)$. Hallar la derivada de

a. $r_1(t) \cdot r_2(t)$

b. $r_1(t) \times r_2(t)$

Solución

Para el caso (a), se tiene,

$$r_1'(t) = (10t, 1, -3t^2), r_2'(t) = (\cos t, \sin t, 0), \text{ o sea,}$$

$$= (10t, 1, -3t^2)(\sin t, -\cos t, 0) + (\cos t, \sin t, 0)(5t^2, t, -t^3)$$

$$= 10t \sin t - \cos t + 5t^2 \cos t - \cos t = (5t^2 - 1) \cos t + 11t \sin t$$

Otro método es efectuar primero el producto escalar entre las funciones vectoriales, o sea,

$$r_1(t) \cdot r_2(t) = (5t^2, t, -t^3)(\sin t, -\cos t, 0) = 5t^2 \sin t - t \cos t, \text{ luego se tiene, } (r_1(t) \cdot$$

$$r_2(t))' = (5t^2 \sin t - t \cos t)' = 10t \sin t - \cos t + 5t^2 \cos t - \cos t$$

$$= (5t^2 - 1) \cos t + 11t \sin t$$

Para el caso (b), se tiene,

$$r_1'(t) = (10t, 1, -3t^2), r_2'(t) = (\cos t, \sin t, 0), \text{ o sea,}$$

$$\begin{aligned}
 &= r_1'(t) \times r_2(t)' = (10t, 1, -3t^2) \times (\cos t, -\sin t, 0) + (5t^2, t, -t^3) (\sin t, \cos t, 0) \\
 &= (-3t^2 \cos t, -3t^2 \sin t, -10t \cos t - \sin t) + (t^3 \sin t, -t^3 \cos t, 5t^2 \sin t - t \cos t) \\
 &= t^2(-3 \cos t + t \sin t), -t^2(\sin t + t \cos t), -11t \cos t - \sin t + 5t^2 \sin t
 \end{aligned}$$

Otro método es efectuar primero el producto cruz entre las funciones vectoriales, o sea,

$$\begin{aligned}
 r_1(t) \times r_2(t) &= (-t^3 \cos t, -t^3 \sin t, -5t^2 \cos t - t \sin t) \\
 (r_1(t) \times r_2(t))' &= ((-t^3 \cos t, -t^3 \sin t, -5t^2 \cos t - t \sin t))' \\
 &= (-3t^2 \cos t + t^3 \sin t), (-3t^2 \sin t - t^3 \cos t), -11t \cos t - \sin t + 5t^2 \sin t \\
 &= t^2(-3 \cos t + t \sin t), -t^2(\sin t + t \cos t), -11t \cos t - \sin t + 5t^2 \sin t
 \end{aligned}$$

2.5.1. Aplicaciones de la derivada de funciones vectoriales

Como ya se analizó en párrafos anteriores, las funciones vectoriales (tomando como parámetro t el tiempo), las podemos usar para describir el movimiento a lo largo de una curva y poder trazar la gráfica de una curva, a esto le podemos añadir el hecho de que la derivada de una función vectorial representa la velocidad de la partícula, y la segunda derivada determina la función aceleración, con lo cual, se debe considerar las siguientes premisas:

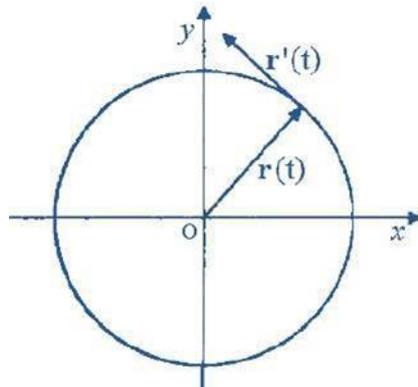
1. El vector $r'(t_0) = v(t_0)$ se denomina vector velocidad y es el vector tangente a la curva C , y su norma, o sea, $\|r'(t_0)\|$ representa la velocidad escalar de $r(t_0)$ en el punto t_0 .
2. De manera análoga, $v'(t_0) = a(t_0)$ representa el vector aceleración se define.
3. La rapidez de una partícula en t_0 es la define como la magnitud del vector velocidad, o sea:

$$\|r'(t_0)\| = \|v(t_0)\| = \sqrt{f(t_0)^2 + g(t_0)^2 + h(t_0)^2}$$

Ejemplo 2.21. El movimiento de una partícula se describe por la función $r(t) = (3 \cos t, 3 \sin t), t \in \mathbb{R}$. Determinar la velocidad, rapidez y aceleración en cualquier instante, así como la gráfica de la función vectorial.

Figura 45

Movimiento de una partícula



Nota: Autor (2024)

Solución

Por definición se tiene, $r'(t) = v(t) = (-3\text{sen}t, 3\text{cos}t)$. La rapidez corresponde a la norma del vector velocidad, o sea, $\|v(t)\| = \sqrt{(-3\text{sen}t)^2 + (3\text{cos}t)^2} = 3$, finalmente, la aceleración es, $v'(t) = (-3\text{cos}t, -3\text{sen}t)$.

Ejemplo. 2.22. El movimiento de una partícula se describe por la función $r(t) = (\text{cos}2t, \text{sen}2t, 2t), t \in \mathbb{R}$. Determinar la velocidad, rapidez, aceleración y el ángulo que forman los vectores velocidad y aceleración.

Solución

Velocidad, $v(t) = r'(t) = (\text{cos}2t, \text{sen}2t, 2t)' = (-2\text{sen}2t, 2\text{cos}2t, 2)$

Rapidez, $\|v(t)\| = \sqrt{(-2\text{sen}2t)^2 + (2\text{cos}2t)^2 + 2^2} = \sqrt{4 + 4 + 4} = 2\sqrt{3}$

Aceleración, $a(t) = v'(t) = (-2\text{sen}2t, 2\text{cos}2t, 2)' = (-4\text{cos}2t, -4\text{sen}2t, 0)$

Norma de la aceleración, $\|a(t)\| = \sqrt{(-4\text{cos}2t)^2 + (-4\text{sen}2t)^2 + 0} = \sqrt{16 + 16} = 4\sqrt{2}$

Como se explicó anteriormente, el ángulo entre dos vectores se determina por,

$$\cos\theta = \frac{v(t) \cdot a(t)}{\|v(t)\| \|a(t)\|} = \frac{(-2\text{sen}2t, 2\text{cos}2t, 2)(-4\text{cos}2t, -4\text{sen}2t, 0)}{(2\sqrt{3})(4\sqrt{2})} = \frac{0}{8\sqrt{6}}$$

Por tanto, $\cos\theta = 0$, o sea, $\theta = \cos^{-1}(0) = \frac{\pi}{2} = 90^\circ$

Ejemplo 2.23. Una partícula se mueve a lo largo de una curva cuyas ecuaciones paramétricas son $x = e^{-t}, y = 2\cos 3t, z = 2\sin 3t$, donde t es el tiempo. Determinar:

- Velocidad y aceleración en cualquier instante.
- Las magnitudes de la velocidad y aceleración en $t = 0$.

Solución

Para el caso (a) se tiene que, dado el vector posición definido por, $r = e^{-t}i + 2\cos 3t j + 2\sin 3t k$, el vector velocidad corresponde a, $v(t) = \frac{dr}{dt} = -e^{-t}i - 6\sin 3t j + 6\cos 3t k$ y la aceleración está dada, $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2r}{dt^2} = e^{-t}i - 18\cos 3t j - 18\sin 3t k$.

Para el caso (b), la magnitud de la velocidad y aceleración en $t = 0$, corresponde a,

$$v(0) = (-1, -6, 0), \text{ o sea, } \|v(t)\| = \sqrt{(-1)^2 + (-6)^2 + 0^2} = \sqrt{37}$$

$$a(0) = (1, -18, 0), \text{ o sea, } \|a(t)\| = \sqrt{1^2 + (-18)^2 + 0^2} = \sqrt{325}$$

Ejemplo 2.24. Una partícula se mueve a lo largo de una curva cuyas ecuaciones paramétricas son $x = 2t^2, y = t^2 - 4t, z = -t - 5$, donde t es el tiempo. Determinar componentes de su velocidad y aceleración en el momento $t = 1$ en la dirección $i - 2j + 2k$. Dado el vector posición definido por, $r = 2t^2i + (t^2 - 4t)j + (-t - 5)k$, el vector velocidad corresponde a, $v(t) = \frac{dr}{dt} = 4t i - (2t - 4)j - k$, en $t = 1, v(1) = 4i - 2j - k$.

El vector unitario en la dirección $i - 2j + 2k$ es

$$\frac{i - 2j + 2k}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + (2)^2}} = \frac{1}{3}i, \frac{2}{3}j, \frac{2}{3}k$$

Luego, la componente en la dirección dada está dada por la proyección vectorial,

$$(4i - 2j - k) \left(\frac{1}{3}i - \frac{2}{3}j + \frac{2}{3}k \right) = 2$$

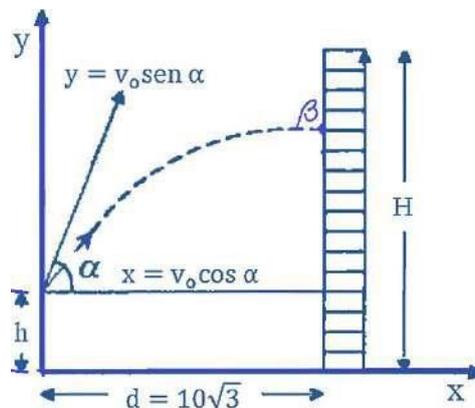
La aceleración, $a = \frac{d^2r}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dr}{dt} \right) = \frac{d}{dt} (4ti + (2t - 4)j - k) = 4i + 2j$

Ejemplo 2.25. Una persona lanza una pelota con una velocidad inicial de 20 m/s, y un ángulo de elevación de 60° hacia un muro de 20 m de alto, que se encuentra a $10\sqrt{3}$ m de distancia. Si la mano del muchacho se halla a 1 m del suelo, se pide determinar:

- La función vectorial que describe la trayectoria de la pelota.
- ¿Cae la pelota detrás del muro o choca con él? Si choca, determinar el ángulo con que choca (considere $g = 10 \text{ m/s}^2$).

Figura 46

Movimiento bidimensional



Nota: Autor (2024)

Solución

De los datos del problema, se tiene, $v_0 = 20 \text{ m/s}$, $\theta = 60^\circ$, $H = 20 \text{ m}$, $d = 10\sqrt{3}$, $h = 1.5 \text{ m}$, $g = 10 \text{ m/s}^2$

A partir de las ecuaciones del movimiento parabólico,

$$x = 20 \cos 60^\circ t = 10t$$

$$y = 1 + v_0 \sin 60^\circ - 0.5gt^2 = 1 + 10\sqrt{3}t - 5t^2$$

a. Luego, la función vectorial correspondiente es,

$$f(t) = (10t, 1 + 10\sqrt{3}t - 5t^2)$$

b. Para el caso en $x_0 = d = 10\sqrt{3}$, entonces, $10\sqrt{3} = 10t$, $t = \sqrt{3} \text{ s}$

por lo tanto, $y = 1 + 10\sqrt{3}t - 5t^2 = 1 + 10\sqrt{3}(\sqrt{3}) - 5(\sqrt{3})^2 = 16m$

Como $y < H$ o sea, $16 < 20$, entonces, el ángulo de impacto es, $f'(t) = (10t, 1 + 10\sqrt{3}t - 5t^2)' = (10, 10\sqrt{3} - 10t)$, y para $t = \sqrt{3}$,

$$f'(\sqrt{3}) = (10, 10\sqrt{3} - 10(\sqrt{3})) = (10, 0)$$

y puesto que $\tan\beta = y/x$, se tiene,

$$\tan\beta = \frac{y}{x} = \frac{0}{10} = 0, \beta = \tan^{-1}(0) = 0^\circ$$

Ejemplo 2.26. Un proyectil se dispara con rapidez inicial de 500 m/s, y un ángulo de elevación de 30° , se pide determinar: a. la velocidad en el tiempo, t . b) La altura máxima. c. Su alcance. d. La rapidez del proyectil al impactar en el suelo (considere $g = 10 \text{ m/s}^2$).

Solución

De los datos del problema, se tiene lo siguiente, $v_0 = 500 \text{ m/s}$, $\theta = 30^\circ$ Del análisis de movimiento parabólico, se tiene,

$$x = v_0 \cos 30^\circ t = 250\sqrt{3}t$$

$$y_1 = \text{sen} 30^\circ t$$

$$y = v_0 \text{sen} 30^\circ t - 5t^2 = 250t - 5t^2$$

$$f(t) = (250\sqrt{3}t, 250t - 5t^2)$$

a. $f'(t) = (250\sqrt{3}, 250 - 10t)$

b. Altura máxima, $y'(250t - 5t^2)' = 250 - 10t = 0, t = 25s$

Luego, $y_{max} = 250(25) - 5(25)^2 = 3125m$

c. Su alcance máximo, para $t = 25s$

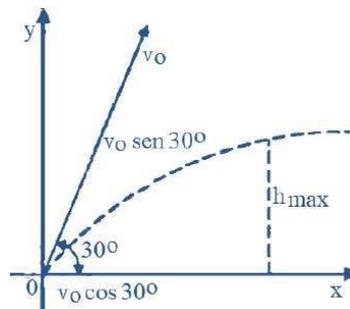
$$x = v_0 \cos 30^\circ t = 250\sqrt{3}(25) = 6250\sqrt{3}m$$

d. Rapidez del proyectil al impactar en el suelo

$$||f'(t - 50)|| = \sqrt{(250\sqrt{3})^2 + (-250)^2} = 500 \text{ m/s}$$

Figura 47

Movimiento bidimensional



Nota: Autor (2024)

2.6. Integral de una función vectorial de un parámetro

La integral de una función vectorial continua $\mathbf{r}(t)$ en un intervalo $[a,b]$ del parámetro t , se define de forma similar a la integral de una función con valores reales, pero teniendo en cuenta que ahora el resultado es un vector, de manera que la integral de $\mathbf{r}(t)$ se puede expresar en términos de las integrales de sus funciones componentes si cada una de las integrales existe, como sigue:

$$\int \mathbf{r}(t)dt = \int f(t)idt + \int g(t)jdt + \int h(t)kdt$$

Para el caso de la integral definida y aplicando el Teorema Fundamental del Cálculo y la Regla de Barrowse generaliza para funciones vectoriales continuas, de la siguiente manera

$$\int_a^b \mathbf{r}(t)dt = \mathbf{R}(t)|_a^b = \mathbf{R}(b) - \mathbf{R}(a)$$

Donde $\mathbf{R}(t)$ es una primitiva de $\mathbf{r}(t)$, o sea, $\mathbf{R}'(t) = \mathbf{r}(t)$

- Propiedades de la integral de una función vectorial

- $\int \alpha \mathbf{r}(t)dt = \alpha \int \mathbf{r}(t)dt$
- $\int c \cdot \mathbf{r}(t)dt = c \cdot \int \mathbf{r}(t)dt$
- $\int c \mathbf{x} \mathbf{r}(t)dt = c \mathbf{x} \int \mathbf{r}(t)dt$
- $\int (\mathbf{r}_1(t) \pm \mathbf{r}_2(t))dt = \int \mathbf{r}_1(t)dt \pm \int \mathbf{r}_2(t)dt$
- $\|\int \mathbf{r}(t)dt\| \leq \int \|\mathbf{r}(t)\|dt$

Ejemplo 2.27. Encontrar la función vectorial más general cuya derivada es:

$$R(t) = (t, -t^3, 3t^5)$$

$$\int R(t)dt = r(t) = \int t dt i - \int t^3 j + 3 \int t^5 k + C$$

$$r(t) = \frac{t^2}{2} i - \frac{t^4}{4} j + \frac{t^6}{2} k + C$$

Ejemplo 2.28. Encontrar la función vectorial más general cuya derivada es:

$$R(t) = \left(\frac{1}{1+t^2}, \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}, \tan t \right)$$

$$\int R(t)dt = r(t) = \int \frac{dt}{1+t^2} i + \int \frac{dt}{1-t^2} j + \int \tan t dt k + C$$

$$r(t) = \tan^{-1} t i + \operatorname{sen}^{-1} t j + \ln|\operatorname{cosec} t| + C$$

Ejemplo 2.29. Encontrar la función vectorial cuya derivada es:

$$R(t) = (t^2, t\sqrt{t-1}, t \operatorname{sen} \pi t), t \in [1, 2]$$

Solución

$$\int_1^2 R(t)dt = r(t) = \int_1^2 t^2 dt i + \int_1^2 t\sqrt{t-1} dt j + \int_1^2 t \operatorname{sen} \pi t dt k$$

$$r(t) = \frac{t^3}{3} \Big|_1^2 i + \left(\frac{2}{5}(t-1)^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}(t-1)^{\frac{3}{2}} \right) \Big|_1^2 j + \left(\frac{-t \cos \pi t}{\pi} + \frac{\operatorname{sen} \pi t}{\pi^2} \right) \Big|_1^2 k$$

$$r(t) = \frac{7}{3} i + \frac{16}{15} j - \frac{3}{5} k$$

Ejemplo 2.30. Encontrar la función vectorial cuya derivada es:

$$R(t) = (\operatorname{sen} t, \operatorname{cost}, \tan t), t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$$

Solución

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} R(t)dt = r(t) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{sen} t dt i + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{cost} dt j + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan t dt k$$

$$r(t) = -\operatorname{cost} \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} i + \operatorname{sen} t \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} j + \ln |\sec t| \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} k$$

$$r(t) = \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)i + \frac{\sqrt{2}}{2}j + \ln\sqrt{2}k$$

Ejemplo 2.31. Encontrar la función vectorial cuya derivada es:

$$R(t) = \left(\frac{1}{1+t^2}, \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, 4t^3\right), t \in [2,4]$$

$$\int_2^4 R(t)dt = r(t) = \int_2^4 \frac{1}{1+t^2} dti + \int_2^4 \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} dtj + \int_2^4 4t^3 dtk$$

$$r(t) = \frac{1}{2} \ln(1+t^2) \Big|_2^4 i + \sqrt{1+t^2} \Big|_2^4 j + t^4 \Big|_2^4 k$$

$$r(t) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{17}{5}\right) i + (\sqrt{17} - \sqrt{5})j + 240k$$

2.7. Características en las curvas de funciones vectoriales de un parámetro

Existen muchas formas de definir una curva, así por ejemplo podemos definir a una curva como el rango de una función vectorial de variable real, también se puede definir como la trayectoria de una partícula en movimiento, por lo tanto para nuestro estudio a una curva se puede representar por medio de una función vectorial $f(t) = x(t)i + y(t)j + z(t)k$, la que se denota por $C: f(t)$, donde cada valor de t_0 de t le corresponde un punto de la curva C cuyo vector de posición es $f(t_0)$ es decir, $f(t_0) = x(t_0)i + y(t_0)j + z(t_0)k$

Observación: La pregunta que se pueden hacer es como una función vectorial de variable real donde los elementos de su rango son vectores pueden generar una gráfica (Curva). En realidad, al trasladar un elemento $t \in \text{Dom } f(t)$ de la función $f(t)$ en \mathbb{R}^3 y transformado por la regla de correspondencia en un vector con origen en $(0,0,0)$ de modo que su extremo se encuentra en la curva, el “paso” de este vector genera un punto en la curva, con lo cual la traza de la curva estará formada por las “huellas” de todos los vectores obtenidos al ser trasladados del $\text{Dom } f(t)$. También a una curva C , se la puede definir por medio de las ecuaciones: $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$, llamadas ecuaciones paramétricas de la curva C donde la variable t se denomina parámetro.

Ejemplo 2.31. Realizar la gráfica de la función vectorial $f(t) = 2\text{sent}i + 3\text{cost}j, t \in [0, 2\pi]$

Solución

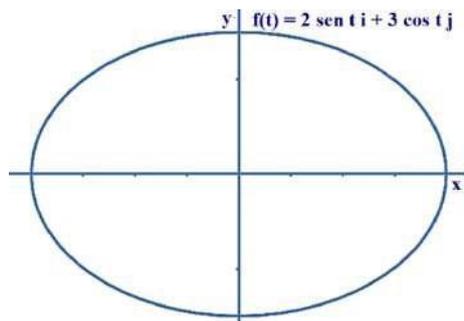
Las ecuaciones paramétricas de $f(t)$ pueden ser reescritas como sigue,

$$\begin{cases} x = 2\text{sent}, x^2 = 4\text{sen}^2 t \\ y = 3\text{cost}, y^2 = 9\text{sen}^2 t \end{cases} \text{ de donde, } \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$$

Ecuación que representa una elipse, de ecuación $9x^2 + y^2 = 36$, y, $C(0,0)$

Figura 48

Forma paramétrica de la elipse



Nota: Autor (2024)

Ejemplo 2.32. Realizar la gráfica de la función vectorial $f(t) = 4\text{sent}i + 3\text{cost}j + tk, t \in [0, 4\pi]$.

Solución

Las ecuaciones paramétricas de $f(t)$ son,

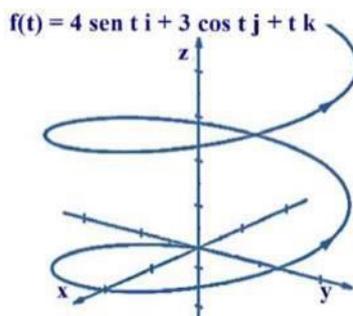
$$\begin{cases} x = 4\text{sen} t, x^2 = 16\text{sen}^2 t \\ y = 3\text{cost}, y^2 = 9\text{sen}^2 t \\ z = t \end{cases} \text{ de donde, } \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$$

La función de valor vectorial $f(t) = 4\text{sent}i + 3\text{cost}j + tk$, describe una hélice elíptica. La proyección de esta hélice en el plano xy es una elipse.

Por último, las flechas en el gráfico de esta hélice indican la orientación de la curva a medida que t progresa de 0 a 4π .

Figura 49

Hélice elíptica parametrizada



Nota: Autor (2024)

2.7.1. Conversión de ecuaciones de una curva en el plano

- De ecuaciones paramétricas a cartesianas

A partir de la ecuación cartesiana $F(x, y) = 0$, se puede obtener una curva C , donde cada una de las variables es una función de una tercera variable t , es decir: $x = f(t), y = g(t)$, donde cada $t \in I$, determina un par de valores reales

(x, y) que satisface a la ecuación $F(x, y) = 0$, es decir, $C: \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases} t \in \mathbb{R}$

Ejemplo 2.33. Parametrizar la parábola $y = x^2/2 + x$

Solución

La función dada puede ser reescrita como sigue:

$$\text{Sea } x = t, y = \frac{t^2}{2} + t, \text{ luego, } \begin{cases} x = t, t \in \mathbb{R} \\ y = \frac{t^2}{2} + t \end{cases}$$

- De ecuaciones cartesianas a paramétricas

Dadas las ecuaciones paramétricas de una curva, $C: \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases} t \in \mathbb{R}$, se puede obtener su ecuación cartesiana $F(x, y) = 0$, con solo eliminar el parámetro t por métodos algebraicos o por medio de algunas identidades trigonométricas.

Ejemplo 2.34. Hallar la ecuación cartesiana de la curva $C: \begin{cases} x = 3t^2 + 2 \\ y = t + 3 \end{cases} t \in \mathbb{R}$

Solución

Despejando el parámetro t en, $y = t + 3$, se tiene, $t = y - 3$ y reemplazando en la ecuación $x = 3t^2 + 2 = 3(y - 3)^2 + 2$, $(x - 2)/3 = (y - 3)^2$, ecuación que corresponde a una parábola de vértice $V(2,3)$ (ver figura 50).

Ejemplo 2.35. Hallar la ecuación cartesiana de $C: \begin{cases} x = 2(1 + \cos\theta) \\ y = 2\text{sen}\theta, \theta \in \mathbb{R} \end{cases}$

Solución

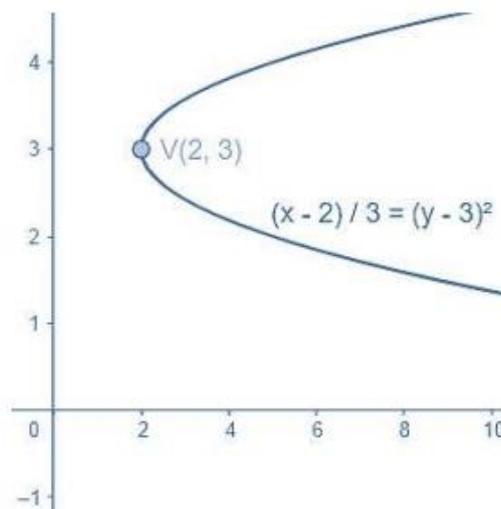
Despejando el parámetro t en ambas ecuaciones, $\begin{cases} \frac{x-2}{2} = \cos\theta \\ \frac{y}{2} = \text{sen}\theta \end{cases}$, luego se tiene,

$$\left(\frac{x-2}{2}\right)^2 = \cos^2 \theta, \left(\frac{y}{2}\right)^2 = \text{sen}^2 \theta$$

Sumando las ultimas ecuaciones se obtiene, $C: (x - 2)^2 + y^2 = 4$, que corresponde a una circunferencia de centro y radio, $C(2,0), r = 2$ (ver figura 51)

Figura 50

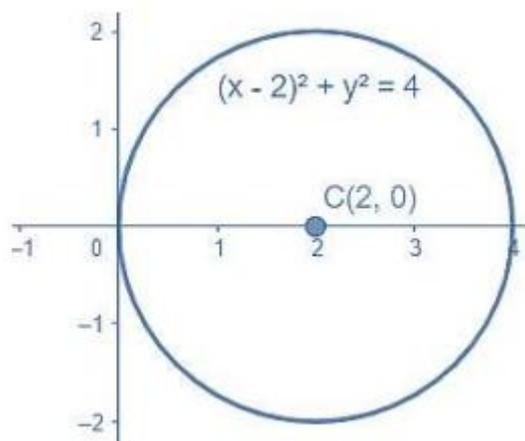
Parábola parametrizada



Nota: Autor (2024)

Figura 51

Circunferencia parametrizada



Nota: Autor (2024)

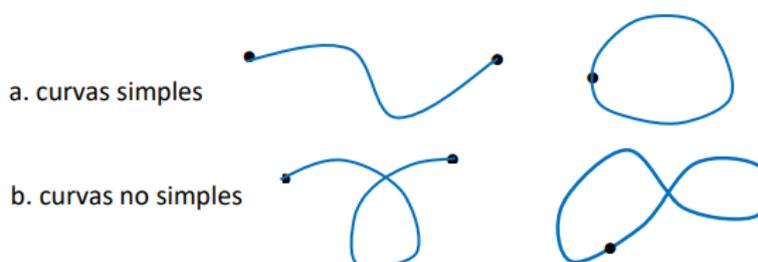
2.7.2. Definición de tipos de curvas

Sea una curva C la representación gráfica de la función vectorial $r(t)$ con $t \in I = [a, b]$

- C es una curva simple si $\forall t_1, t_2 \in (a, b)$ tal que $t_1 \neq t_2$ resulta $r(t_1) \neq r(t_2)$

Figura 52

Tipos de líneas curvas



Nota: Autor (2024)

Es decir, una curva C es simple si no se cruza a si mismo al variar t en (a, b) .

- C es una curva cerrada si $r(a) = r(b)$, en caso contrario la curva C es una curva abierta.

Figura 53

Tipos de curvas geométricas



Nota: Autor (2024)

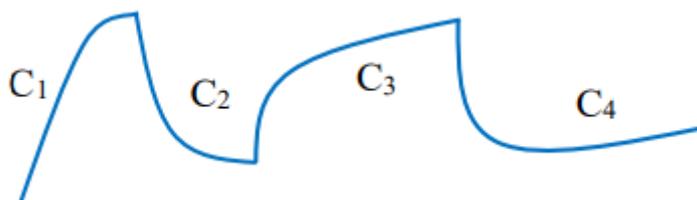
- C es una curva suave si $r(t)$ es continua en (a, b) y $r'(t) \neq 0 \forall t \in (a, b)$, es decir, una curva suave no posee puntos angulosos.
- C es una curva seccionalmente suave (suave por partes) si está formada por un número finito de arcos de curva suave.

Curva seccionalmente suave

$$C = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4$$

Figura 54

Curva seccionalmente suave (suave por tramos)



Nota: Autor (2024)

Si la curva C , está contenida en un plano, la curva C se define como curva plana, en caso contrario se denomina curva alabeada, por ejemplo, la circunferencia, la elipse, son curvas planas, en cambio la hélice cilíndrica es una curva alabeada. Por otro lado, se define a una curva como regular si $r(t)$ es de clase C^1 y además $r'(t) \neq 0, \forall t \in [a, b]$.

Los puntos $P(x, y, z)$ de la curva C , en donde $r'(t) \neq 0$ para alguna representación paramétrica de la curva C se denominan puntos regulares, pero los puntos en donde $r'(t) = 0$, se denominan puntos singulares.

Ejemplo 2.36. Demostrar que la curva definida por $r(t) = (t^3 - t, t^5 - t, \text{sen}^2 \pi t)$, $\forall t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, es una curva regular y si $P(0,0,0)$ es un punto múltiple.

Solución

La curva es regular si no tiene puntos singulares, es decir, puntos donde el vector derivado sea $(0,0,0)$. Como el vector derivado es, $r'(t) = (3t^2 - 1, 5t^4 - 1, 2\text{sen} \pi t \cos \pi t)$

Este vector se anula, si y solo si, $3t^2 - 1 = 0, 5t^4 - 1 = 0, 2\text{sen} \pi t \cos \pi t = 0$, lo cual no ocurre simultáneamente para ningún valor de t , por tanto, es una curva regular.

Además, para que sea $P(0,0,0)$ sea punto múltiple debe ser $x = 0, y = 0, z = 0$, para dos valores distintos de λ , y buscando si existen estos valores, se tiene, $3\lambda^2 - 1 = 0, \lambda_x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}; 5\lambda^4 - 1 = 0, \lambda_y = \pm \frac{1}{\sqrt{5}}; 2\text{sen} \pi t \cos \pi t = 0, \lambda_z \in \{0, \pm 1\}$

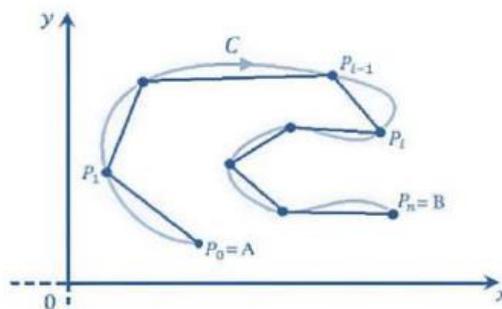
Luego, $P(0,0,0)$ es un punto múltiple de multiplicidad 3.

2.7.3. Longitud de una curva parametrizada

Se toma una curva de clase C^1 , definida por $r(t) = (f(t), g(t))$ $cont \in [a, b]$, y tomando n subintervalos de longitud $t = (b - a)/n$, además, sea t_0 el parámetro que corresponde al punto inicial $P_0 = A$ de la curva, y $t_n = b$ el parámetro que corresponde al punto final $P_n = B$, donde t_1, t_2, \dots, t_n (donde $t_i = t_{i-1} + \Delta t$) para cada i) a los valores de t al final de cada subintervalo en la figura paramétrica, entonces para cada la poligonal con vértices $P_0, P_1, \dots, P_{i-1}, P_i, \dots, P_n$ aproxima a la curva C , tal como se muestra en la figura.

Figura 55

Aproximación poligonal de C



Nota: Autor (2024)

Si se desea medir la longitud de la curva, aproximándola con la longitud de la poligonal, que es la suma de las longitudes de los n segmentos. Considerando que cuando $n \rightarrow \infty$, la poligonal se aproxima cada vez “mejor” a la curva, de esta forma se define la longitud total de la curva $L_C = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \|\overline{P_{i-1} - P_i}\|$, donde $\|\overline{P_{i-1} - P_i}\| = \sqrt{[f(t_i) - f(t_{i-1})]^2 + [g(t_i) - g(t_{i-1})]^2}$, recordando que, $f(t_i) - f(t_{i-1}) = f'(c_i)\Delta t$, $g(t_i) - g(t_{i-1}) = g'(d_i)\Delta t$

Entonces, la suma de las longitudes de los segmentos resulta:

$$L_C = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sqrt{[f'(c_i)]^2 + [g'(d_i)]^2} \Delta t = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2} dt$$

En el caso de una curva suave en el espacio, parametrizada por, $r(t) = (f(t), g(t), h(t))$ de clase C^1 con $t \in [a, b]$, la ecuación de longitud de la curva dada por $r(t)$ corresponde a, $L_C = \int_a^b \|r'(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2 + [h'(t)]^2} dt$

Ejemplo 2.37. Calcular la longitud de la función $r(t) = (4\cos t, 4\sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$

Solución

De la función $r(t) = (4\cos t, 4\sin t)$, y derivando, $r'(t) = (-4\sin t, 4\cos t)$

$$L_C = \int_a^b \|r'(t)\| dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{[-4\sin t]^2 + [4\cos t]^2} dt = \int_0^{2\pi} 4 dt = 8\pi$$

Ejemplo 2.38. Calcular la longitud de una vuelta de la hélice circular definida por $r(t) = (\cos t, \sin t, 3)$, $t \in [0, 2\pi]$

Solución

De la función $r(t) = (\cos t, \sin t, 3)$, y derivando, $r'(t) = (-\sin t, \cos t, 0)$

$$L_C = \int_a^b \|r'(t)\| dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{[-\sin t]^2 + [\cos t]^2 + 9} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{10} dt = 2\sqrt{10}\pi$$

Ejemplo 2.39. Calcular la longitud de la parábola $y = x^2$, $x \in [0, 1]$.

Solución

Parametrizando la parábola se tiene:

$x = t, y = t^2$, luego la función parametrizada es, $r(t) = (t, t^2), t \in [0,1]$ con $r'(t) = (1, 2t)$, entonces, $\|r'(t)\| = \sqrt{1 + 4t^2}$, o sea

$$L_C = \int_a^b \|r'(t)\| dt = \int_0^1 \sqrt{1 + 4t^2} dt, \text{ haciendo, } t = \frac{\tan u}{2}, u = \tan^{-1} 2t \text{ tiene,}$$

$$dt = \sec^2 \frac{u}{2} du, \text{ o sea, } \int \sqrt{1 + 4t^2} dt = \frac{1}{2} \int \sec^2 u \sqrt{1 + \tan^2 u} du$$

$$\frac{1}{2} \int \sec^3 u du = \frac{1}{2} (\sec u \tan u + \frac{1}{2} \int \sec u du) = \frac{1}{4} (\sec u \tan u + \ln(\sec u + \tan u))$$

Luego se obtiene, $\frac{1}{4} (\sec u \tan u + \ln(\sec u + \tan u))$, donde, $\sec(t) = \sqrt{1 + 4t^2}$
 $\tan(\tan^{-1} 2t) = 2t$, por tanto, $= \frac{1}{4} \ln(2t + \sqrt{1 + 4t^2}) + \frac{1}{2} t \sqrt{1 + 4t^2}$, al evaluar se
 tiene, $= \frac{1}{4} \ln(2t + \sqrt{1 + 4t^2}) + \frac{1}{2} t \sqrt{1 + 4t^2} \Big|_0^1 = \frac{1}{4} [\ln(1 + \sqrt{5}) + 2\sqrt{5}]$

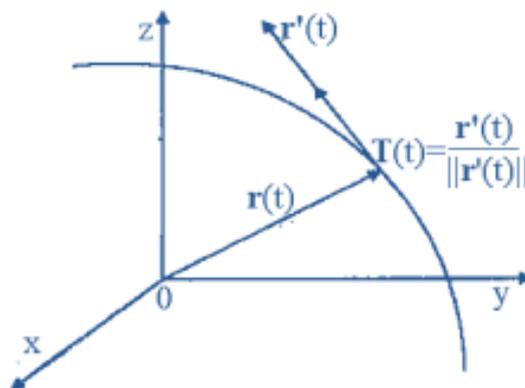
2.8. Vectores unitarios: Tangente, Normal principal y Binormal de un parámetro

- Vector Tangente unitario

Si $r(t)$ es el vector de posición de una curva C en un punto P de C , el vector tangente unitario de la curva C en P , y que se denota por $T(t)$, está dado $T(t) = \frac{r'(t)}{\|r'(t)\|}$, tal como se muestra en la figura.

Figura 56

Vector tangente unitario



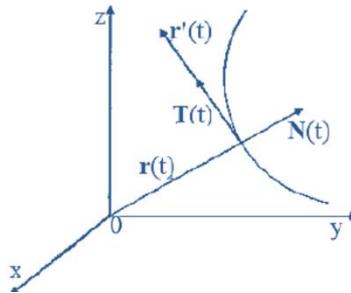
Nota: Autor (2024)

- Vector Normal unitario

Si $r(t)$ es el vector tangente unitario de la curva C en el punto P de C , el vector normal unitario de C en P , denotado por $N(t)$, es el vector unitario en la dirección de $T'(t)$ está dado por, $N(t) = \frac{T'(t)}{\|T'(t)\|}$, tal como se muestra en la figura.

Figura 57

Vector normal



Nota: Autor (2024)

- Vector Binormal unitario

El producto cruz de $T(t)$ y $N(t)$ es un vector unitario ortogonal tanto a $T(t)$ como a $N(t)$.

Este vector es llamado vector binormal unitario y se denota por $B(t) = T(t) \times N(t)$.

Los tres vectores unitarios mutuamente ortogonales $T(t)$, $N(t)$ y $B(t)$ de una curva C reciben el nombre de **triedro móvil** de la curva C . Los planos determinados por las representaciones de los tres vectores en un punto del espacio reciben nombres específicos (más adelante se amplían estos conceptos):

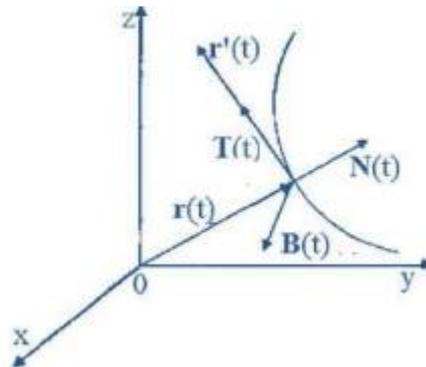
Plano osculador: Formado por los vectores unitarios $T(t)$ y $N(t)$

Plano rectificador: Formado por los vectores unitarios $T(t)$ y $B(t)$.

Plano normal: Formado por los vectores unitarios $N(t)$ y $B(t)$.

Figura 58

Vector binormal unitario



Nota: Autor (2024)

2.9. Vector Curvatura y Curvatura

La curvatura de la curva C en un punto mide que tan rápido la curva cambia de dirección en ese punto. Específicamente mide la magnitud de la razón de cambio del vector unitario tangente con respecto a la longitud de arco. Si $r(t)$ es el vector de posición de la curva C , entonces,

el vector curvatura está dado por, $K(t) = \frac{T'(t)}{\|r'(t)\|}$

y el radio de curvatura por, $k(t) = \frac{\|r'(t) \times r''(t)\|}{\|r'(t)\|^3}$

Ejemplo 2.40. Sea C la curva definida por las ecuaciones: $r(t) = (t^2, 4t, t^3)$, determine la función curvatura y el radio de curvatura en $r(0) = (0,0,0)$

Solución

De la expresión, $k(t) = \frac{\|r'(t) \times r''(t)\|}{\|r'(t)\|^3}$, luego para esta curva, se tiene, $r(t) = (t^2, 4t, t^3)$, $r'(t) = (2t, 4, 3t^2)$, $r''(t) = (2, 0, 6t)$, evaluado en $t = 0$, $r'(t) = (0, 4, 0)$, $r''(t) = (2, 0, 0)$, además, $r'(t) \times r''(t) = (0, 4, 0) \times (2, 0, 0) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -8k$, y su norma, $\|r'(t) \times r''(t)\| = 8$

Luego la curvatura en $(2,0,0)$ es $k(t) = \frac{8}{4^3} = \frac{1}{8}$

El radio de curvatura $R(t)$ es el inverso de la curvatura k , es decir, $R(t) = \frac{8}{1} = 8$

Ejemplo 2.41. Encontrar la curvatura y el vector normal de la parametrización

$$r(t): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, r(t) = (t, 2t^2, t^2)$$

Solución

Se conoce que, $k(t) = \frac{\|r'(t) \times r''(t)\|}{\|r'(t)\|^3}$, luego para esta curva, se tiene, $r(t) = (t, 2t^2, t^2)$, $r'(t) = (1, 4t, 2t)$, $r''(t) = (0, 4, 2)$, por tanto, $\|r'(t)\| = \sqrt{1 + (4t)^2 + (2t)^2} = \sqrt{1 + 20t^2}$, además, $r'(t) \times r''(t) = (1, 4t, 2t) \times (0, 4, 2) =$

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 4t & 2t \\ 0 & 4 & 2 \end{vmatrix} = -2j + 4k,$$

y su norma, $\|r'(t) \times r''(t)\| = \sqrt{(-2)^2 + (4)^2} = 2\sqrt{5}$,

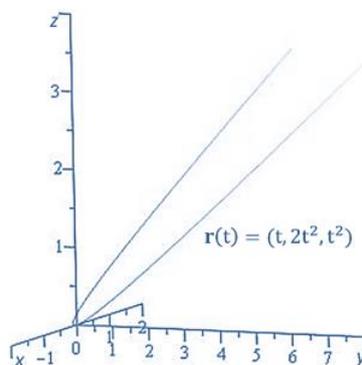
$$\text{luego, } k(t) = \frac{2\sqrt{5}}{(1+20t^2)^{\frac{3}{2}}}$$

El vector normal tiene la misma dirección y sentido que el vector, $[r'(t) \times r''(t)] \times r'(t)$, por lo tanto, $[(1, 4t, 2t) \times (0, 4, 2)] \times (1, 4t, 2t) = (0, 4, 2) \times (1, 4t, 2t)$,

$$\text{o sea, } [r' \times r''] \times r' = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 4t & 2t \end{vmatrix} = -20ti + 4j + 2k$$

Figura 59

Curvatura función parametrizada



Nota: Autor (2024)

Como este vector debe ser unitario, el vector normal correspondiente es,

$$\|(-20t, 4, 2)\| = \sqrt{(-20t)^2 + (4)^2 + (2)^2} = \sqrt{400t^2 + 20}$$

$$N(t) = \frac{-20t, 4, 2}{\|-20t, 4, 2\|} = \frac{-20ti + 4j + 2k}{\sqrt{400t^2 + 20}}$$

Ejemplo 2.42. Hallar los vectores tangente unitario y normal principal de la espiral cónica generado por, $r(t) = (acost, bcost), t \in [0, 2\pi]$, siendo $a, b > 0$.

Solución

De $r(t) = (acost, bcost)$, se tiene, $r'(t) = (-asent, bcost)$, por tanto, $\|r'(t)\| = \sqrt{a^2 sen^2 t + b^2 cos^2 t}$, luego

$$\text{Vector unitario, } T(t) = \frac{r'(t)}{\|r'(t)\|} = \left(\frac{-a \text{ sen } t}{\sqrt{a^2 sen^2 t + b^2 cos^2 t}}, \frac{b \text{ cos } t}{\sqrt{a^2 sen^2 t + b^2 cos^2 t}} \right)$$

$$T'(t) = \frac{r''(t)}{\|r''(t)\|} = \left(\frac{-ab^2 \text{ cost}}{(a^2 sen^2 t + b^2 cos^2 t)^{\frac{3}{2}}}, \frac{-a^2 b \text{ sent}}{(a^2 sen^2 t + b^2 cos^2 t)^{\frac{3}{2}}} \right)$$

Además, si $\|T'(t)\| = \frac{ab}{a^2 sen^2 t + b^2 cos^2 t}$, luego el vector normal es, $N(t) = \frac{T'(t)}{\|T'(t)\|} = \frac{b \text{ cos } t}{\sqrt{a^2 sen^2 t + b^2 cos^2 t}}, \frac{-a \text{ sen } t}{\sqrt{a^2 sen^2 t + b^2 cos^2 t}}$

Ejemplo 2.43. Hallar el triedro móvil de la curva $y = x^2, z = 2x$ en el punto $x=2$.

Solución

Escribiendo la curva en forma paramétrica, se tiene, $C: x = x^2, z = 2x$, considerando $x = t$

$$r(t) = (t, t^2, 2t) \text{ por tanto, } r'(t) = (1, 2t, 2), \text{ y tomando, } t = 2, r'(2) = (1, 4, 2),$$

$$\|r'(t)\| = \sqrt{1 + 16 + 4} = \sqrt{21}, \text{ por tanto, } T(t) = \frac{r'(t)}{\|r'(t)\|}, T(2) = \frac{r'(2)}{\|r'(2)\|} = \frac{(1, 4, 2)}{\sqrt{21}}$$

$$r'(t) = (1, 2t, 2) = (1, 4, 2), r''(t) = (0, 2, 0), \|r''(2)\| = 2$$

$$\text{Cálculo Binormal, } B(t) = \frac{r'(t) \times r''(t)}{\|r'(t) \times r''(t)\|}, B(2) = \frac{(1, 4, 2) \times (0, 2, 0)}{\|(1, 4, 2) \times (0, 2, 0)\|} = \frac{(-4, 0, 2)}{2\sqrt{5}}$$

$$\text{Cálculo Normal, } N(t) = T(t) \times B(t) = \frac{(1, 4, 2)}{\sqrt{21}} \times \frac{(-4, 0, 2)}{2\sqrt{5}} = \left(\frac{4}{\sqrt{105}}, -\frac{5}{\sqrt{105}}, \frac{8}{\sqrt{105}} \right)$$

2.10. Planos: Osculador, Normal y Rectificante

Estos conceptos están vinculados al hecho de que si se considera una curva regular definida que va de $\mathbf{r}(t): [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$, tal que, $\mathbf{r}(a, b) = C \subset \mathbb{R}^3$, entonces,

- **Plano Osculador**

El plano que pasa por el punto , $\mathbf{r}(t_0) = (x_0, y_0, z_0)$ y además es paralelo a los vectores $\mathbf{T}(t_0)$ y $\mathbf{N}(t_0)$, se llama **plano osculador**, y su ecuación está dada por:
 $\mathbf{r}(t): [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$, tal que, $\mathbf{r}(a, b) = C \subset \mathbb{R}^3$, entonces,

- **Plano Normal**

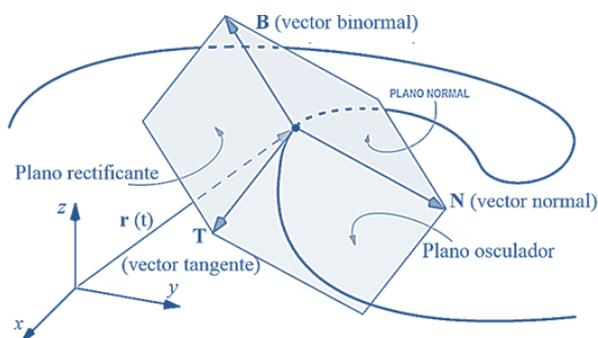
El plano que pasa por el punto , $\mathbf{r}(t_0) = (x_0, y_0, z_0)$ y además es paralelo a los vectores $\mathbf{B}(t_0)$ y $\mathbf{N}(t_0)$, se llama **plano normal principal**, y su ecuación está dada por: $\mathbf{T}(t_0)[(x, y, z) - (x_0, y_0, z_0)] = 0$

- **Plano Rectificante**

El plano que pasa por el punto , $\mathbf{r}(t_0) = (x_0, y_0, z_0)$ y además es paralelo a los vectores $\mathbf{T}(t_0)$ y $\mathbf{B}(t_0)$, se llama **plano rectificante**, y su ecuación está dada por:
 $\mathbf{N}(t_0)[(x, y, z) - (x_0, y_0, z_0)] = 0$

Figura 60

Triedro de Frenet – Serret



Nota: Autor (2024)

Ejemplo 2.44. Determinar el centro de curvatura de la curva dada por las ecuaciones $x = \cos \theta$; $y = \sin \theta$, $z = \theta$, en $z = \pi$.

Solución

Hay que determinar el vector normal y el radio de curvatura. Se conoce que el vector dado por $[\mathbf{r}'(\theta) \times \mathbf{r}''(\theta)] \times \mathbf{r}'(\theta)$ tiene la misma dirección y sentido que el vector normal principal, por lo tanto,

$$\mathbf{r}'(\theta) = (-\operatorname{sen} \theta, \cos \theta, 1), \mathbf{r}''(\theta) = (-\cos \theta, -\operatorname{sen} \theta, 0), \text{ evaluado en } \pi$$

$$\mathbf{r}'(\pi) \times \mathbf{r}''(\pi) = (0, -1, 1) \times (1, 0, 0) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0, 1, 1)$$

$$[\mathbf{r}'(\pi) \times \mathbf{r}''(\pi)] \times \mathbf{r}'(\pi) = (0, 1, 1) \times (0, -1, 1) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (2, 0, 0)$$

Luego, el vector normal en el punto correspondiente a $\theta = \pi$ es,

$$\|(2, 0, 0)\| = \sqrt{(2)^2 + (0)^2 + (0)^2} = \sqrt{4} = 2, \text{ o sea, } \mathbf{N}(t) = \frac{(2, 0, 0)}{2} = (1, 0, 0)$$

Como la curvatura en un punto genérico está dado por,

$$k(t) = \frac{\|\mathbf{r}'(\pi) \times \mathbf{r}''(\pi)\|}{\|\mathbf{r}'(\pi)\|^3} = \frac{\|(0, -1, 1)\|}{\|(0, 1, 1)\|^3} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{8}} = \frac{1}{2}$$

Como el radio de curvatura $R(t)$ es el recíproco de $k(t)$, entonces, $R(\pi) = 2$

Centro de curvatura es, $c = \mathbf{r}(\pi) + R(\pi)\mathbf{N}(\pi) = (-1, 0, \pi) + 2(1, 0, 0) = (1, 0, \pi)$

Ejemplo 2.45. En la curva dada por $\mathbf{r}'(t) = (\cos t, t^2 - 2, t + 1), t \in \mathbb{R}$ determínese el triedro de Frenet-Serret

Solución

De la ecuación $\mathbf{r}(t) = (\cos t, t^2 - 2, t + 1)$, en $\mathbf{r}(0) = (1, -2, 1)$, se tiene,

$$\mathbf{r}'(t) = (-\operatorname{sen} t, 2t, 1) = (1, 4, 2), \mathbf{r}''(t) = (-\cos t, 2, 0), \text{ para } t = 0$$

$$\mathbf{r}'(0) = (0, 0, 1), \mathbf{r}''(0) = (-1, 2, 0), \|\mathbf{r}''(0)\| = \sqrt{5}$$

$$\mathbf{r}'(0) \times \mathbf{r}''(0) = (0, 0, 1) \times (-1, 2, 0) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (-1, 2, 0)$$

$$[\mathbf{r}'(\pi) \times \mathbf{r}''(\pi)] \times \mathbf{r}'(\pi) = (-1, 2, 0) \times (0, 0, 1) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1, 2, 0)$$

Luego, el vector normal en el punto correspondiente a $\theta = \pi$ es, o sea, $\mathbf{N}(t) = \frac{(-1, 2, 0)}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}(-1, 2, 0)$

Por tanto, el vector Binormal es, $\mathbf{B}(t) = \mathbf{T}(t) \times \mathbf{N}(t) = (0, 0, 1) \times \frac{(-1, 2, 0)}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2, -1, 0)$

Por tanto, el triedro de Fresnet – Serret corresponde a,

$$\left\{ (0, 0, 1), \frac{1}{\sqrt{5}}(-1, 2, 0), \frac{1}{\sqrt{5}}(-2, -1, 0) \right\}$$

2.11. Problemas propuestos

- **Ecuaciones paramétricas en el plano y en el espacio**

1. Bosqueje la curva ubicando puntos por medio de las ecuaciones paramétricas. Indique con una flecha la dirección en que se traza la curva cuando t crece.

a. $x = t^3 + 1, y = t^2, -2 \leq t \leq 2$. Sol. $y = (x - 1)^{2/3}$

b. $x = 4 \cos t, y = 5 \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi$. Sol. $25x^2 + 16y^2 = 400$

c. $x = t, y = t, z = t^2, t \in \mathbb{R}$. Sol. $x = y, z = x^2$

d. $x = \cos t, y = \sin t, z = t, t \in \mathbb{R}^+$. Sol. $x^2 + y^2 = 1$

2. Expresé la ecuación cartesiana como paramétrica y grafique.

a. $x^2 + y^2 = 9, z = t$. Sol. $x = 3 \cos t, y = 3 \sin t, z = t$

b. $(x - 1)^2 + 4(y - 2)^2, z = t$. Sol. $x = 1 + 2 \cos t, y = 2 + \sin t, z = t$

c. $x^2 + y^2 = 16, z = xy$. Sol. $x = 4 \cos t, y = 4 \sin t, z = 16 \cos t \sin t$.

d. $16x^2 + 9y^2 = z, y = x^2$. Sol. $x = t, y = t^2, z = 16t^2 + 9t^4$.

3. Describa el movimiento de una partícula con posición (x, y) cuando t varía en el intervalo dado.

a. $x = 3 + 2 \cos t, y = 1 + 2 \sin t, t \in [\pi/2, 3\pi/2]$

b. $x = 2 \sin t, y = 4 + \cos t, t \in [0, 3\pi/2]$

c. $x = 5 \sin t, y = 2 \cos t, t \in [-\pi, 5\pi]$

- d. $x = \operatorname{sen} t, y = \cos^2 t, t \in [\pi/2, 3\pi/2]$
4. Determine el dominio de las siguientes funciones vectoriales:
- a. $\mathbf{r}(t) = (\sqrt{4-t^2}, e^{-t}, \ln(t+1))$. Sol. $(-1, 2)$
- b. $\mathbf{r}(t) = (\frac{t-2}{t+2}, \operatorname{sen} t, \ln(9-t^2))$. Sol. $(-3, -2) \cup (-2, 3)$
- c. $\mathbf{r}(t) = (e^{-3t}, t^2 / \operatorname{sen}^2 t, \cos 2t)$. Sol. $(1, 1, 1)$
- d. $\mathbf{r}(t) = (\frac{t^2-t}{t-1}, \sqrt{8+t}, \operatorname{sen} \pi t / \ln t)$. Sol. $(1, 3, -\pi)$
5. Determinar las ecuaciones paramétricas para el segmento rectilíneo que une P y Q.
- a. $P = (2, 0, 0), Q = (6, 2, -2)$. Sol. $x = 2 + 4t, y = 2t, z = -2t, 0 \leq t \leq 1$
- b. $P = (-1, 2, -2), Q = (-3, 5, 1)$. Sol. $x = -1 - 2t, y = 2 + 3t, z = -2 + 3t, 0 \leq t \leq 1$
- c. $P = (0, -1, 1), Q = (\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4})$. Sol. $x = t/2, y = -1 + 4t/3, z = 1 - 3t/4, 0 \leq t \leq 1$
6. Graficar la curva con ecuaciones paramétricas $x = \operatorname{sen} t, y = \operatorname{sen} 2t, z = \cos 4t$. Explicar su forma graficando sus proyecciones sobre los tres planos coordenados.
7. Graficar la curva con ecuaciones paramétricas:
 $x = 0.5\sqrt{4 - \cos^2 10t} \cos t, y = 0.5\sqrt{4 - \cos^2 10t} \operatorname{sen} t, z = 0.5 \cos 10t$
 Explicar la apariencia de la gráfica mostrando que está sobre una esfera.
8. Demuestre que la curva cuyas ecuaciones paramétricas son: $x = t^2, y = 1 - 3t, z = 1 + t^3$ pasa por los puntos $(1, 4, 0)$ y $(9, -8, 28)$, pero no por el punto $(4, 7, -6)$.
9. Encuentre una función vectorial que representa la curva de intersección de las dos superficies.
- a. El cilindro $x^2 + y^2 = 4$, y la superficie $z = xy$. Sol. $\mathbf{r}(t) = (2 \cos t, 2 \operatorname{sen} t, 2 \operatorname{sen} 2t)$
- b. El cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, y el plano $z = 1 + y$. Sol. $\mathbf{r}(t) = (t, 0.5(t^2 - 1), 0.5(t^2 + 1))$
- c. El paraboloide $z = 4x^2 + y^2$, y el cilindro parabólico $y = x^2$. Sol. $\mathbf{r}(t) = (t, t^2, 4t^2 + t^4)$
- d. El hiperboloide $x^2 + y^2 + 4z^2 = 4$, y el cilindro $x^2 + z^2 = 1$. Sol. $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, \cos 2t)$

• **Límites y derivadas de funciones vectoriales**

1. Calcular el límite $\lim_{t \rightarrow t_0} f(t)$ de las funciones vectoriales siguientes:

a. $f(t) = \left(\frac{t^2 - 2t - 3}{t - 3}, \frac{t^2 - 5t + 6}{t - 3} \right), t \rightarrow 3. \text{Sol. } (4, 1)$

b. $f(t) = \left(\frac{\sqrt{1+t}-1}{\sqrt[3]{1+t}-1}, \frac{\sqrt[3]{27+t}-3}{\sqrt[4]{16+t}-2} \right), t \rightarrow 0. \text{Sol. } \left(\frac{3}{2}, \frac{32}{27} \right)$

c. $f(t) = \left(\frac{1+5^t}{1-e^t}, \frac{\text{sen } 2t}{\ln(1+t)} \right), t \rightarrow 0. \text{Sol. } (\ln 5, 2)$

d. $f(t) = \left(\frac{e^{2t}-1}{\ln(1+t)}, \frac{\text{sen}^2 3t}{\ln^2(1+2t)} \right), t \rightarrow 0. \text{Sol. } \left(-\frac{1}{2}, \frac{9}{4} \right)$

e. $f(t) = \left(\frac{t^2-t}{t-1}, \sqrt{t+8}, \frac{\text{sen } \pi t}{\ln t} \right), t \rightarrow 1. \text{Sol. } (1, 3, -\pi)$

f. $f(t) = \left(\frac{e^t-e}{t-1}, \frac{\ln t}{1-t}, 2t \right), t \rightarrow 1. \text{Sol. } (e, -1, 2)$

g. $f(t) = \left(\frac{\text{sen } t}{t}, \frac{\cos t - 1}{2t}, e^t \right), t \rightarrow 0. \text{Sol. } (1, 0, 1)$

h. $f(t) = \left(\frac{\text{sen } 7t}{t}, \frac{\text{sen } 5t}{\text{sen } 3t}, \frac{\tan 3t}{\text{sen } 2t} \right), t \rightarrow 0. \text{Sol. } \left(7, \frac{5}{3}, \frac{3}{2} \right)$

i. $f(t) = \left(\ln t, \sqrt{t^2+1}, \frac{3t}{4-t^2} \right), t \rightarrow 1. \text{Sol. No existe el límite}$

j. $f(t) = \left(\left(\frac{1}{t+1} \right)^{1/t}, \frac{\sqrt{1-t}-\sqrt{1+t}}{t}, \frac{t^3-t}{t} \right), t \rightarrow 0. \text{Sol. } (e^{-1}, -1, -1)$

2. Calcular la derivada de las funciones vectoriales siguientes:

a. $r(t) = (1 + t^3, te^{-t}, \text{sen } 2t). \text{Sol. } (3t^2, (1-t)e^{-t}, 2 \cos 2t)$

b. $r(t) = (e^{t^2}, -1, \ln(1+3t)). \text{Sol. } \left(2te^{t^2}, 0, \frac{3}{1+3t} \right)$

c. $r(t) = (t \text{sen } t, t^2, t \cos 2t). \text{Sol. } (t \cos t + \text{sen } t, 2t, \cos 2t - 2t \text{sen } 2t)$

d. $r(t) = (\tan t, \sec t, 1/t^2). \text{Sol. } (\sec^2 t, \sec t \tan t, -2/t^3)$

e. $r(t) = \left(\frac{1}{1+t}, \frac{t}{1+t}, \frac{t^2}{1+t} \right). \text{Sol. } \left(-\frac{1}{(1+t)^2}, \frac{1}{(1+t)^2}, \frac{t^2+2t}{(1+t)^2} \right)$

• **Derivada de una función vectorial de un parámetro**

1. Encuentre el vector tangente unitario $T_u(t)$ en el punto con el valor dado del parámetro t .

a. $r(t) = (te^{-t}, 2 \tan^{-1} t, 2e^t), t = 0. \text{Sol. } \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right)$

b. $r(t) = (t^3 + 3t, t^2 + 1, 3t + 4), t = 1. \text{Sol. } \left(\frac{6}{7}, \frac{2}{7}, \frac{3}{7} \right)$

c. $r(t) = (\cos t, 3t, 2 \text{sen } 2t), t = 0. \text{Sol. } \left(0, \frac{3}{5}, \frac{4}{5} \right)$

d. $r(t) = (\text{sen}^2 t, \cos^2 t, \tan^2 t), t = \frac{\pi}{4}. \text{Sol. } \left(\frac{1}{3\sqrt{2}}, -\frac{1}{3\sqrt{2}}, \frac{4}{3\sqrt{2}} \right)$

2. Determine las ecuaciones paramétricas de la recta tangente a la curva de ecuaciones paramétricas dadas en el punto especificado.
 - a. $\mathbf{r}(t) = (1 + 2\sqrt{t}, t^3 - t, t^3 + t), P(3, 0, 2)$. Sol. $x = 3 + t, y = 2t, z = 2 + 4t$
 - b. $\mathbf{r}(t) = (e^t, te^t, te^{t^2}), t = 0, P(1, 0, 0)$. Sol. $x = 1 + t, y = t, z = t$
 - c. $\mathbf{r}(t) = (e^{-t} \cos t, e^{-t} \sin t, e^{-t}), t = 0, P(1, 0, 1)$. Sol. $x = 1 - t, y = t, z = 1 - t$
 - d. $\mathbf{r}(t) = (\sqrt{t^2 + 3}, \ln(t^2 + 3), t), P(2, \ln 4, 1)$. Sol. $x = 2 + \frac{t}{2}, y = \ln 4 + \frac{t}{2}, z = 1 + t$
3. Encuentre una ecuación vectorial para la recta tangente a la curva de intersección de los cilindros $x^2 + y^2 = 25$ y $x^2 + y^2 = 20$ en el punto $(3, 4, 2)$. Sol. $(3 - 4t, 4 + 3t, 2 - 6t)$
4. Encuentre el punto sobre la curva $\mathbf{r}(t) = (2\cos t, 2\sin t, e^t), 0 \leq t \leq \pi$, donde la recta tangente es paralela al plano $\sqrt{3}x + y = 1$. Sol. $(\sqrt{3}, 1, e^{\frac{\pi}{6}})$
5. Encontrar el punto de intersección de las rectas tangentes a la curva $\mathbf{r}(t) = (\sin \pi t, 2 \sin \pi t, \cos \pi t)$, en $t = 0$ y $t = 0.5$, y realizar la gráfica respectiva. Sol. $P(1, 2, 1)$
6. Las curvas $\mathbf{r}_1(t) = (t, t^2, t^3)$ y $\mathbf{r}_2(t) = (\sin t, \sin 2t, t)$ se cortan en el origen. Encontrar su ángulo de intersección con una aproximación grado más próximo. Sol. 66°
7. ¿En qué punto se intersecan las curvas $\mathbf{r}_1(t) = (t, 1 - t, 3 + t^2)$ y $\mathbf{r}_2(t) = (3 - s, s - 2, s^2)$. Hallar su ángulo de intersección aproximado al grado más próximo. Sol. $P(1, 0, 4), 55^\circ$

• **Integral de una función vectorial de un parámetro**

1. Evaluar las integrales siguientes:
 - a. $\int_0^2 (t, -t^3, 3t^5) dt$. Sol. $(2, -4, 32)$
 - b. $\int_0^1 \left(0, \frac{4}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right) dt$. Sol. $(0, \pi, \ln 2)$
 - c. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (3 \sin^2 t \cos t, 3 \sin t \cos^2 t, 2 \sin t \cos t) dt$. Sol. $(1, 1, 1)$
 - d. $\int_1^2 (t^2, t\sqrt{t-1}, \sin \pi t) dt$. Sol. $\left(\frac{7}{3}, \frac{16}{15} - \frac{3}{\pi}\right)$
2. Encuentre $\mathbf{r}(t)$ para los siguientes casos:
 - a. $\mathbf{r}'(t) = (2t, 3t^2, \sqrt{t}), \mathbf{r}(1) = (1, 1, 0)$. Sol. $\left(t^2, e^t, t^3, \frac{2t^2}{3} - \frac{2}{3}\right)$

- b. $\mathbf{r}'(t) = (t, e^t, te^t), \mathbf{r}(0) = (1, 1, 1)$. Sol. $(\frac{t^2}{2} + 1, e^t, te^t - e^t + 2)$
- c. $\mathbf{r}'(t) = (-3 \operatorname{sen} t, -3 \operatorname{cos} t, 2t), \mathbf{r}(0) = (3, 0, 0)$. Sol. $(-3 \operatorname{cos} t, 3 \operatorname{sen} t, t^2)$
- d. $\mathbf{r}'(t) = (t^2, 5t, 1), \mathbf{r}(1) = (0, 1, 2)$. Sol. $(\frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{3}, \frac{5t^2}{2} - \frac{3}{2}, t + 1)$
- e. $\mathbf{r}''(t) = (0, 0, 16), \mathbf{r}(0) = (1, 0, 0), \mathbf{r}'(0) = (0, 1, 0)$. Sol. $(1, t, 8t^2)$
- f. $\mathbf{r}''(t) = (0, 2, 0), \mathbf{r}(3) = (1, 1, 0), \mathbf{r}'(3) = (0, 0, 1)$. Sol. $(1, t^2 - 6t + 10, t - 3)$

• **Aplicaciones de la integral de una función paramétrica**

1. Determinar la longitud de la curva, definida por:

- a. $\mathbf{r}(t) = (t, 2 \operatorname{cos} t, 2 \operatorname{sen} t), -3 \leq t \leq 3$. Sol. $6\sqrt{5}$
- b. $\mathbf{r}(t) = (2t, t^2, \frac{t^3}{3}), 0 \leq t \leq 2$. Sol. $\frac{20}{3}$
- c. $\mathbf{r}(t) = (\sqrt{2}t, e^t, e^{-t}), -1 \leq t \leq 1$. Sol. $2(e + e^{-1} - 2)$
- d. $\mathbf{r}(t) = (\operatorname{cos} t, \operatorname{sen} t, \ln \operatorname{cos} t), -\pi/4 \leq t \leq \pi/4$. Sol. $\ln \left(\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} \right)$
- e. $\mathbf{r}(t) = (12t, 8t^{3/2}, 3t^2), -1 \leq t \leq 1$. Sol. 24

2. Determinar los vectores tangente unitario y normal unitario $\mathbf{T}_u(t)$ y $\mathbf{N}_u(t)$ y radio de curvatura $\rho(t)$ de los vectores

- a. $\mathbf{r}(t) = (t, t^2/2, t^2)$. Sol. $\mathbf{T}_u(t) = (1, t, 2t)/\sqrt{5t^2 + 1}, \mathbf{N}_u(t) = (-5t, 1, 2)/\sqrt{25t^2 + 5}, \rho(t) = \sqrt{5}/(5t^2 + 1)^{3/2}$
- b. $\mathbf{r}(t) = (\sqrt{2}t, e^t, e^{-t})$. Sol. $\mathbf{T}_u(t) = (\sqrt{2}, e^{2t}, -1)/(e^{2t} + 1), \mathbf{N}_u(t) = (1 - e^{2t}, \sqrt{2}e^t, \sqrt{2}e^t)/(e^{2t} + 1), \rho(t) = \sqrt{2}e^{2t}/(e^{2t} + 1)^2$
- c. $\mathbf{r}(t) = (t, 2 \operatorname{cos} t, 2 \operatorname{sen} t)$. Sol. $\mathbf{T}_u(t) = (1, -2 \operatorname{sen} t, 2 \operatorname{cos} t)/\sqrt{5}, \mathbf{N}_u(t) = (0, -4 \operatorname{cos} t, -4 \operatorname{sen} t)/\sqrt{5}, \rho(t) = 2/5$
- d. $\mathbf{r}(t) = (t^2, \operatorname{sen} t - t \operatorname{cos} t, \operatorname{cos} t + t \operatorname{sen} t)$. Sol. $\mathbf{T}_u(t) = (2, \operatorname{sen} t, \operatorname{cos} t)/\sqrt{5}, \mathbf{N}_u(t) = (0, \operatorname{cos} t, -\operatorname{sen} t)/\sqrt{5}, \rho(t) = t^{-1}/5$

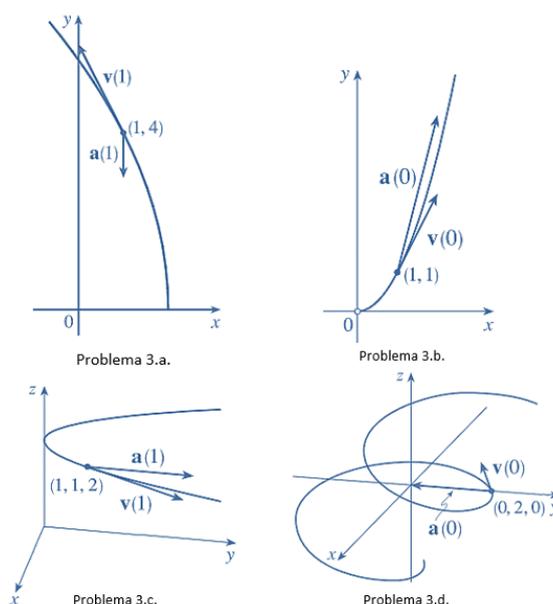
3. Calcular la velocidad, aceleración y rapidez de una partícula con la función de posición dada. Graficar la trayectoria de la partícula y esbozar los vectores de velocidad y aceleración para el valor especificado de t .

- a. $\mathbf{r}(t) = (2 - t, 4\sqrt{t}), t = 2$. Sol. $\mathbf{v}(t) = (-1, 2/\sqrt{t}), \mathbf{a}(t) = (0, -1/t^{3/2}), v(t) = \sqrt{1 + 4/t}, \text{ en } t = 2, \mathbf{v}(2) = (-1, 2/\sqrt{2}), \mathbf{a}(2) = (0, -1/2\sqrt{2}), v(2) = \sqrt{3}$
- b. $\mathbf{r}(t) = (e^t, e^{2t}), t = 0$. Sol. $\mathbf{v}(t) = (e^t, 2e^{2t}), \mathbf{a}(t) = (e^t, 4e^{2t}), v(t) = e^t/\sqrt{1 + 4e^{2t}}, \text{ en } t = 0, \mathbf{v}(0) = (1, 2), \mathbf{a}(0) = (1, 4), v(0) = 1/\sqrt{5}$

- c. $\mathbf{r}(t) = (t, t^2, 2), t = 1$. Sol. $\mathbf{v}(t) = (1, 2t), \mathbf{a}(t) = (0, 2), v(t) = \sqrt{1 + 4t^2}$, en $t = 0, \mathbf{v}(0) = (1, 2), \mathbf{a}(0) = (0, 4), v(0) = 1/\sqrt{5}$
- d. $\mathbf{r}(t) = (t, 2 \cos t, \sin t), t = 0$. Sol. $\mathbf{v}(t) = (1, -2 \sin t, \cos t), \mathbf{a}(t) = (0, -2 \cos t, -\sin t), v(t) = \sqrt{2 + 3 \sin^2 t}$, en $t = 0, \mathbf{v}(0) = (1, 0, 1), \mathbf{a}(0) = (0, -2, 0), v(0) = \sqrt{2}$

Figura 61

Problema 3 a, b, c, d



Nota: Autor (2024)

4. ¿Determinar la fuerza requerida para que una partícula de masa m tenga la función de posición $\mathbf{r}(t) = 2t^3/3 \mathbf{i} + 3t^2/2 \mathbf{j} + 2t^3/3 \mathbf{k}$? Sol. $\mathbf{F}(t) = 4mt \mathbf{i} + 3mt \mathbf{j} + 4mt \mathbf{k}$
5. Una fuerza de magnitud de 15 N actúa en forma directa hacia arriba del plano xy sobre un objeto con masa de 3 kg. El objeto parte del origen con velocidad inicial $\mathbf{v}(0) = \mathbf{i} - 2\mathbf{j}$. Determinar la función de posición y su rapidez en el tiempo t . Sol. $\mathbf{r}(t) = t \mathbf{i} - 2t \mathbf{j} + 5t^2/2 \mathbf{k}, v(t) = \sqrt{5 + 25t^2}$.
6. Se dispara un proyectil con una rapidez inicial de 200 m/s y un ángulo de elevación de 60° . Se pide determinar: a) el alcance del proyectil, b) la altura máxima alcanzada y c) la rapidez en el impacto. Sol. $x = 3535 \text{ m}, y = 1531 \text{ m}, v = 200 \text{ m/s}$.

7. Se lanza una pelota con un ángulo de 45° respecto al suelo. Si la pelota alcanza los 90 m desde el punto de lanzamiento, ¿cuál es la rapidez inicial de la pelota? Sol. $v = 30 \text{ m/s}$.
8. Se dispara una pistola con un ángulo de elevación de 30° . ¿Cuál es la velocidad inicial del arma si la altura máxima del proyectil es de 400 m? Considere. Sol. 177 m/s .
9. Un proyectil abandona el arma a una velocidad de 100 m/s. Determine los ángulos de elevación que se puedan aplicar para alcanzar un blanco a 500 m de distancia. Sol. $14.7^\circ, 75.3^\circ$
10. Un bateador envía la pelota de béisbol a 3 pies por arriba del nivel del suelo hacia la valla del campo central, la cual mide 10 pies de altura y está a 400 pies del home. La bola abandona el bate con una rapidez de 116 pies/s y un ángulo de 52° respecto a la horizontal, ¿la pelota podrá librar la valla? Sol. $y = 13.2 \text{ pie} > 10 \text{ pie}$, por tanto, la pelota libra la valla.
11. Dado el vector posición, calcular las componentes tangencial y normal del vector aceleración:
 - a. $\mathbf{r}(t) = (3t - t^3, 3t^2)$ Sol. $a_T(t) = 6t, a_N(t) = 6t$
 - b. $\mathbf{r}(t) = (1 + t, t^2 - 2t)$ Sol. $a_T(t) = 0, a_N(t) = 1$
 - c. $\mathbf{r}(t) = (t, t^2, 3t)$ Sol. $a_T(t) = 4t/\sqrt{10 + 4t^2}, a_N(t) = 2\sqrt{10}/\sqrt{10 + 4t^2}$
 - d. $\mathbf{r}(t) = (e^t, \sqrt{2}t, e^{-t})$ Sol. $a_T(t) = e^t - e^{-t}, a_N(t) = \sqrt{2}$
 - e. $\mathbf{r}(t) = (t, \cos t, \sin t)$ Sol. $a_T(t) = 0, a_N(t) = 1$
12. Hallar la longitud de la curva definida por: $\mathbf{r}(t) = (2t, t^2, t^3/3), 0 \leq t \leq 1$. Sol. $7/3$
13. Hallar la longitud de la curva definida por: $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, t), 0 \leq t \leq 2\pi$. Sol. $2\pi\sqrt{2}$
14. Hallar la curvatura del círculo parametrizado y definida por $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, t)$ Sol. $K = \frac{1}{3}$
15. Una partícula se mueve con función de posición $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, \cos 2t)$. Encuentre las componentes tangencial y normal de la aceleración cuando $t = \frac{\pi}{4}$. Sol. $a_N = 0, a_T = 1$
16. La posición de una nave espacial está dada por: $\mathbf{r}(t) = (1 + t, 8 + t^2, 28 + t^3)$ y las coordenadas de la estación espacial son $(0, 0, 0)$. ¿En qué

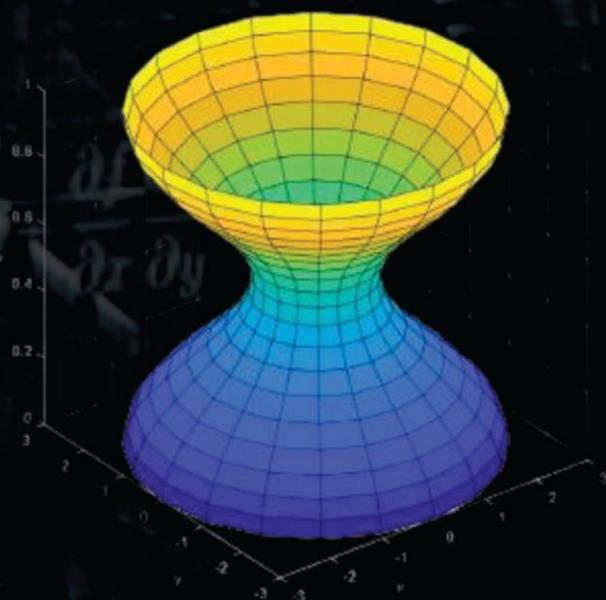
momento t debe el capitán apagar los motores para poder llegar a la estación? Sol. No hay forma de que regrese a la estación.

17. Hallar la aceleración y curvatura de la hélice definida por $\mathbf{r}(t) = (3 \cos t, 3 \sin t, 4t)$ Sol. $\mathbf{a}(t) = (-3 \cos t, -3 \sin t, 0), k = 3/25$

CAPITULO 03

Capítulo III: Funciones de varias variables

FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES



Funciones de varias variables

En el capítulo anterior se presentó las funciones vectoriales, como una generalización de las funciones escalares vistas para describir magnitudes físicas; representación de curvas y superficies en el plano o en el espacio; derivación e integración de funciones vectoriales, y finalmente aplicaciones de esta rama de la Matemática en objetos geométricos (longitud de una curva paramétrica, vector tangente, vector normal, curvatura, etc.) y en Física en cinemática y dinámica de la partícula, intensidad y la dirección de fuerzas como la gravitatoria o la fuerza electromagnética, entre otros tópicos.

La presente unidad se enfoca en el estudio de funciones escalares de varias variables proporcionando las herramientas matemáticas necesarias para analizar, diseñar y comprender sistemas en ingeniería de manera más profunda y precisa. Estas habilidades son esenciales para abordar problemas complejos en una amplia gama de disciplinas de ingeniería como es el caso de Integración en sistemas de coordenadas no cartesianas, análisis de campos escalares y potenciales, modelado de fenómenos físicos, entre otros

El objetivo general del presente capítulo es proporcionar a los estudiantes de ingeniería las habilidades matemáticas necesarias para abordar y resolver problemas complejos en una amplia gama de disciplinas de ingeniería, permitiendo así el diseño y la optimización eficiente de sistemas y procesos de la ingeniería.

Prerrequisitos para abordar este tema

La base teórica necesaria para el estudio de este capítulo es la siguiente:

- Comprender las propiedades y el comportamiento de funciones de una variable en virtud de que algunas técnicas y conceptos se aplican de forma similar a funciones multivariantes.
- Estar familiarizado con sistemas de coordenadas cartesianas y no cartesianas y cómo representar puntos, vectores y superficies en estos sistemas.
- Comprender qué son y cómo calcular derivadas parciales.

- Comprender los métodos de integración para resolver integrales simples dobles y triples, así como la capacidad de definir y trabajar con regiones de integración en el espacio tridimensional.

3.1. Introducción

En esta unidad se aborda el estudio de las integrales múltiples como son las integrales dobles y triples, e incluso las integrales impropias comprendiendo su definición, propiedades y técnicas de cálculo, así como su aplicación en los campos de la física hasta la ingeniería. Se analiza métodos para evaluar integrales sobre regiones circulares y anulares. Se amplía el campo de estudio de la evaluación de integrales en problemas de simetría mediante conversión de coordenadas rectangulares a cilíndricas, rectangulares a esféricas o viceversa.

3.2. Funciones escalares de varias variables

Una función de varias variables que se denota por $f: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ es la función en que a cada punto $X \in D$ se le hace corresponder un único punto $Y \in \mathbb{R}^m$, el cual se denota en la forma $Y = f(X)$ y que se denomina imagen del punto X . El conjunto D se llama dominio de la función, es decir,

$$f: D_f \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

$$X = (x_1, \dots, x_n) \rightarrow f(x) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n))$$

Donde cada $f_i, i = 1, \dots, m$, es la componente i -ésima, o sea, $f_i: D_f \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

Ejemplo 3.1. Representar el volumen de un cilindro como una función que depende de dos variables: el radio x y la altura y .

Solución

Si tomamos $D_f = \{(x, y): x \geq 0, y \geq 0\}$, se tiene la función,

$$V: D_f \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \rightarrow V(x, y) = \pi x^2 y$$

Ejemplo 3.2. Para la $f: D_f \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por:

$$f(x, y, z) = \left(x^2 + y^2 + z^2, \frac{\text{sen}(xy)}{x - y} \right)$$

Se pide determinar las componentes de $f(x, y, z)$

Solución

Si tomamos $D_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: x \neq y\}$, las componentes de f , corresponden a,

$$f_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2, \quad f_2(x, y, z) = \frac{\text{sen}(xy)}{x - y}$$

Ejemplo 3.3. Hallar el dominio y rango de la función $f(x, y) = x/y$

Solución

La función no está definida para $P(0,0)$, es decir, $f(0,0) = 0/0$, por tanto, su dominio será, $D_f = \{z = (x, y) \in \mathbb{R}^2 / y \neq 0\}$, o sea, todo el plano menos $y = 0$. A su vez, el rango quedará definido por $Rg = \{z \in \mathbb{R}\}$

Ejemplo 3.4. Determinar el dominio y rango de la función $f(x, y) = xy/(x^2 + y^2)$

Solución

La función no está definida para $P(0,0)$, es decir, $f(0,0) = 0/0$, por tanto, $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 - (0,0)\}$, o sea, todo el plano menos el origen de coordenadas $x = y = 0$. Su rango corresponde a, $Rg = \{z \in \mathbb{R} / (-\frac{1}{2} \leq z \leq \frac{1}{2})\}$

Ejemplo 3.5. Hallar el dominio y rango de la función $f(x, y) = (e^{3x} - e^y)/(e^x - e^y)$

Solución

La función no está definida para $e^x \neq e^y$, es decir, su dominio corresponde a, $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / e^x \neq e^y\}$, su rango es, $Rg = \{z \in \mathbb{R}\}$

Ejemplo 3.6. Hallar el dominio y rango de la función $f(x, y) = \ln(x + y - z)$

Solución

La función no está definida para $x + y > z$, es decir, su dominio corresponde a, $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x + y > z\}$. Su rango corresponde a, $Rg = \{z \in \mathbb{R}\}$

3.2.1. Límites de funciones de varias variables

De cursos previos de cálculo diferencial se tiene los siguientes conceptos:

Límite: Para calcular el $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ basta calcular $\lim_{x \rightarrow x_0} f_i(x)$ para $i = 1, 2, \dots, m$, es decir,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x), \lim_{x \rightarrow x_0} f_2(x), \dots, \lim_{x \rightarrow x_0} f_m(x) \right)$$

Continuidad: La función f es continua en $a \in D$ si, y solo si, cada una de las funciones f_i es continua en el punto a .

Derivabilidad: La función f es derivable en $a \in D$ si, y solo si, cada una de las funciones f_i es derivable en el punto a , o sea, $f'(a) = (f'_1(a), f'_2(a), \dots, f'_m(a))$

De estos conceptos preliminares, se establece la definición de función continua y cómo estudiar la continuidad de una función de varias variables. En principio, se comienza con campos escalares y después se extiende la definición a los campos vectoriales.

La definición de **límite de funciones de dos variables** es la misma que para funciones de una sola variable. La única diferencia está en la dimensión, pues en funciones de una variable, la variable L es el límite de una función $f(x)$ cuando x tiende a x_0 , o sea, si cada vez que $f(x)$ este muy cerca de L , se tiene que x está más cerca de x_0 ; en cambio para funciones de dos variables la variable L es el límite de una función cuando (x, y) tiende al punto (a, b) si cada vez que $f(x, y)$ esté muy cerca L , también se tiene que (x, y) está muy cerca de (a, b) , esto significa, que cada vez que la función se aproxima al punto $P(a, b)$ en el plano a través de cualquier dirección, la función se acerca a L , es decir: $|x - x_0| < \delta$; $|y - y_0| < \delta$, donde δ es el entorno en el cual se encuentra el límite.

Es evidente que, para acercarse a un punto en la recta, se puede hacer una aproximación por la derecha o por la izquierda, mientras que, para acercarse a un punto en el plano, se puede hacer a través de cualquier recta que lo contenga o a través de cualquier curva que lo contenga e incluso si esta tiene forma de espiral. Por tanto, al evaluar límites de funciones de dos (o más) variables es una tarea que se puede realizar en dos pasos: primero hallándose el posible valor

límite, si es que existe, y segundo, demostrándose que en realidad este valor es el límite de la función.

Por otro lado, si $c \in \mathbb{R}$ y $f(x, y)$ y $g(x, y)$ son funciones reales de dos variables tales que existen los siguientes límites, o sea,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = L, \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} g(x, y) = M,$$

Entonces se cumplen los siguientes límites:

i. $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} [f(x, y) + g(x, y)] = L + M$

ii. $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} [cf(x, y)] = cL$

iii. $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} [f(x, y) \cdot g(x, y)] = L \cdot M$

iv. $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{f(x,y)}{g(x,y)} = \frac{L}{M}, \text{ si } M \neq 0$

Ejemplo 3.7. Calcular el siguiente límite, en el punto P(4,1):

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (4,1)} \frac{x - 4y}{x^2 - 16y^2}$$

Solución. Al sustituir el par ordenado $x, y) \rightarrow (4,1)$ se obtiene,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (4,1)} \frac{x - 4y}{x^2 - 16y^2} = \frac{4 - 4(1)}{4^2 - 16(1)^2} = \frac{0}{0}$$

Resolviendo operaciones de reducción, y luego evaluándose en el punto de interés, se obtiene:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (4,1)} \frac{x - 4y}{(x + 4y)(x - 4y)} = \lim_{(x,y) \rightarrow (4,1)} \frac{1}{(x + 4y)} = \frac{1}{4 + 4} = \frac{1}{8}$$

Ejemplo 3.8. Comprobar si existe el siguiente límite:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2}{x^2 + y^2}$$

Solución

- El dominio de la función $f(x, y) = \frac{x^2}{x^2 + y^2}$ es $D_f = \mathbb{R}^2 - (0,0)$

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=0}} \frac{x^2}{x^2 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2} = 1, \quad \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ x=0}} \frac{x^2}{x^2 + y^2} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0}{y^2} = 0$$

Luego, se concluye que no existe: $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2}{x^2 + y^2}$

Ejemplo 3.9. Comprobar la existencia del siguiente límite:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right)^2$$

Solución

- El dominio de la función $f(x, y) = \left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right)^2$ es $D_f = \mathbb{R}^2 - (0,0)$

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=0}} \left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right)^2 = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2}{x^2} \right)^2 = 1, \quad \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ x=0}} \left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right)^2 = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{-y^2}{y^2} \right)^2 = 1$$

Sin embargo, si nos acercamos a la vez al punto $P(0,0)$ con $x = 0$, se obtiene

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=x}} \left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right)^2 = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{0}{2x^2} \right)^2 = 0,$$

Luego, se concluye que no existe $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right)^2$

Ejemplo 3.10. Hallar el siguiente límite:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (2,2)} \frac{x + y - 4}{\sqrt{x + y} - 2}$$

Solución

El dominio de la función $f(x, y) = \frac{x+y-4}{\sqrt{x+y}-2}$ es $D_f = \mathbb{R}^2 - \{\sqrt{x+y} \neq 2\}$

Sea $u = x + y$, o sea, $u = 4$, luego se tiene, $f(u) = \frac{u-4}{\sqrt{u}-2}$

$$\lim_{u \rightarrow 4} \frac{u-4}{\sqrt{u}-2} = \lim_{u \rightarrow 4} \frac{u-4}{\sqrt{u}-2} \cdot \frac{\sqrt{u}+2}{\sqrt{u}+2} = \lim_{u \rightarrow 4} \frac{u-4}{u-4} \cdot (\sqrt{u}+2) = \lim_{u \rightarrow 4} (\sqrt{u}+2) = 4$$

Luego, se concluye que $\lim_{(x,y) \rightarrow (2,2)} \frac{x+y-4}{\sqrt{x+y}-2} = 4$

Ejemplo 3.11. Hallar el siguiente límite:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (2,0)} \frac{\sqrt{2x-y}-2}{2x-y-4}$$

Solución

El dominio de la función $f(x, y) = \frac{\sqrt{2x-y}-2}{2x-y-4}$ es $D_f = \mathbb{R}^2 - \{2x - y = 4\}$

Sea $u = 2x - y$, por tanto, $u = 2(2) - 0 = 4$, luego se tiene, $f(u) = \frac{\sqrt{u}-2}{u-4}$

$$\lim_{u \rightarrow 4} \frac{\sqrt{u}-2}{u-4} = \lim_{u \rightarrow 4} \frac{\sqrt{u}-2}{u-4} \cdot \frac{\sqrt{u}+2}{\sqrt{u}+2} = \lim_{u \rightarrow 4} \frac{u-4}{u-4} \cdot \frac{1}{\sqrt{u}+2} = \lim_{u \rightarrow 4} \frac{1}{\sqrt{u}+2} = \frac{1}{4}$$

Luego, se concluye que $\lim_{(x,y) \rightarrow (2,0)} \frac{\sqrt{2x-y}-2}{2x-y-4} = \frac{1}{4}$

3.2.2. Continuidad de funciones de varias variables

En todo curso de Cálculo Diferencial se establece el concepto de función continua de una variable asociado a la idea intuitiva de una función cuya gráfica es una curva “sin saltos”, noción que se puede generalizar para la continuidad de funciones de varias variables, es decir, el concepto de continuidad en funciones de varias variables se apoya en la idea intuitiva de una función cuya gráfica es una superficie sin huecos ni rupturas.

La continuidad de una función $f(x, y)$ en un punto, significa intuitivamente que, si se cambian las coordenadas de un punto en una pequeña cantidad, entonces el valor de $f(x, y)$ cambia en otra pequeña cantidad, es decir,

Definición. Una función real de dos variables $f(x, y)$ es continua en (x_0, y_0) si:

- Existe $f(x_0, y_0)$
- Existe $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y)$
- Se verifica que $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$

Por tanto, $f(x, y)$ es continua en una región plana D , si es continua en todo punto $(x_0, y_0) \in D$

Ejemplo 3.12. Estudiar la continuidad de la siguiente función en todo \mathbb{R}^2

$$f(x, y) = 1 + \frac{2xy^2}{x^2 + y^2}$$

Solución

La función $f(x, y)$ es continua en todos los puntos de su dominio, puesto que es una función racional, bien definida en $\mathbb{R}^2 - (0,0)$, se puede concluir que $(0,0)$ es un punto de discontinuidad evitable dado que existe el límite de $f(x, y)$ cuando (x, y) tiende a $(0,0)$.

Ejemplo 3.13. Estudiar la continuidad de la siguiente función en todo \mathbb{R}^2

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

Solución

La función $f(x, y)$ es continua en $\mathbb{R}^2 - (0,0)$, sin embargo no está definida en el origen, además no existe el límite de $f(x, y)$ cuando (x, y) tiende a $(0,0)$, caracterizando al punto $(0,0)$ como una discontinuidad esencial de $f(x, y)$.

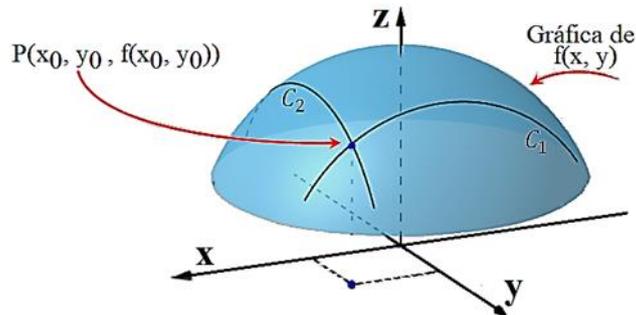
3.2.3. Derivadas Parciales

Las derivadas parciales son como las derivadas comunes solo con la diferencia de que se expresa con varias variables, pero tan solo una trabajará como variable y las demás se mantendrán fijas, es decir, se comportarán como constantes.

Sea $f(x, y)$ una función de dos variables x e y en cierto dominio D de \mathbb{R}^2 . Si se asigna un valor numérico fijo a una de las variables, por ejemplo, a y , y se permite que la otra varíe, la función $f(x, y)$ se convierte de hecho en una función de una sola variable. Por ejemplo, asignemos a y un valor fijo y_0 . ¿Cómo se puede graficar la función $f(x, y)$ de la única variable x ? Para ello, si se traza en \mathbb{R}^3 la curva C_1 dada por $z = f(x, y_0)$, $y = y_0$, que es precisamente la curva generada por la intersección de la gráfica de $f(x, y)$ con el plano $y = y_0$, o sea, C_1 es la traza para $y = y_0$ de la gráfica de $f(x, y)$, como se muestra en la figura.

Figura 62

$P(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ y las trazas $paray = y_0$ y $parax = x_0$



Nota: Autor (2024)

En el plano $y = y_0$, la curva se define por $F_1 = f(x, y_0)$. Si F_1 tiene derivada en x_0 , entonces esta se llama la derivada parcial de f con respecto a x en (x_0, y_0) y se representa por $\frac{\partial f}{\partial x} = (x_0, y_0)$.

Es decir, $\frac{\partial f}{\partial x} = F_1'(x_0)$, y de la definición de la derivada de una función, se tiene,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

Se debe recordar que, en este cociente incremental, la variable y se mantiene constante en el valor y_0 ; el cociente se construye evaluando la función en dos puntos próximos, con el mismo valor de $y = y_0$ y dos valores próximos en torno a x_0

La derivada parcial de f con respecto a y en el punto (x_0, y_0) , se define por $F' = f(x_0, y)$. Si F tiene derivada en x_0 , entonces esta se llama la derivada parcial de f con respecto a y en (x_0, y_0) y se representa por $\frac{\partial f}{\partial y} = (x_0, y_0)$. Es decir, $\frac{\partial f}{\partial y} = F'(x_0)$, y de la definición de la derivada de una función, se tiene,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k}$$

De manera frecuente se emplea la siguiente notación de las derivadas parciales:

$$f_x(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y), f_y(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y),$$

Lo anterior se resume como sigue: a) $\frac{\partial f}{\partial x}$ representa la razón instantánea de cambio de f con respecto a x cuando y está fija, o sea, sea cuando se mueve el punto en la dirección del vector \mathbf{i} . b) $\frac{\partial f}{\partial y}$ representa la razón instantánea de cambio de f con respecto a y cuando x está fija, o sea, sea cuando se mueve el punto en la dirección del vector \mathbf{j} . Podemos decir entonces que las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ son derivadas de f en las direcciones dadas por los versores canónicos (unitarios) \mathbf{i} y \mathbf{j} , respectivamente.

Ejemplo 3.14. Usando reglas de derivación evaluar las derivadas parciales de $f(x, y) = xy^2$ en $(2, 3)$

Solución

De las reglas de derivación y evaluando se obtiene,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = f_x = y^2, \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = f_y = 2xy, \text{ y evaluando en } P(2, 3), \text{ se tiene,}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(2, 3) = 3^2 = 9, \frac{\partial f}{\partial y}(2, 3) = 2(2)(3) = 12$$

Ejemplo 3.15. Usando reglas de derivación evaluar las derivadas parciales de $f(x, y) = xe^{x^2y}$ en $(1, \ln 2)$

Solución

De las reglas de derivación y evaluando se obtiene,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = e^{x^2y}(1 + 2x^2y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^3e^{x^2y}, \text{ y evaluando en } P(1, \ln 2), \text{ se tiene,}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, \ln 2) = 2(1 + 2 \ln 2), \frac{\partial f}{\partial y}(1, \ln 2) = 2$$

Ejemplo 3.16. Calcular las derivadas parciales segundas de la función $f(x, y) = \cos(xy) + x \cos y$.

Solución

Empezamos calculando las primeras derivadas parciales, con lo cual se obtiene, $f_x(x, y) = -y \operatorname{sen}(xy) + \cos y$, $f_y(x, y) = -x \operatorname{sen}(xy) - y \operatorname{sen} y$,

Derivando f_x respecto de x y de y , se obtiene, $f_{xx}(x, y) = -y^2 \cos(xy)$, $f_{xy}(x, y) = -\operatorname{sen}(xy) - xy \cos(xy) - \operatorname{sen} y$, mientras que derivando f_y respecto de x y luego de y , se obtiene, $f_{xy}(x, y) = -\operatorname{sen}(xy) - xy \cos(xy) - \operatorname{sen} y$, $f_{yy}(x, y) = -x^2 \cos(xy) - x \cos y$

Teorema de Clairaut (o Lema de Schwartz). Sea $f(x, y)$ una función definida en una región abierta $D \subset \mathbb{R}^2$ que contiene al punto (x_0, y_0) . Si las funciones f_{yy} y f_{yx} son continuas en D , entonces,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)$$

Ejemplo 3.17. Calcular las derivadas parciales cruzadas de la función $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ y evaluar en el punto $(1, 1)$

Solución

Empezamos calculando las primeras derivadas parciales, con lo cual se obtiene,

$$f_x(x, y) = \frac{2x}{x^2 + y^2}, \quad f_y(x, y) = \frac{2y}{x^2 + y^2}$$

Derivando f_x respecto de y , así como, f_y respecto de x , se obtiene,

$$f_{xy}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} [f_x(x, y)] = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{2x}{x^2 + y^2} \right) = -\frac{4xy}{(x^2 + y^2)^2}, \text{ luego, } f_{xy}(1, 1) = -1$$

mientras que derivando f_y respecto de x , se obtiene,

$$f_{xy}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} [f_y(x, y)] = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{2y}{x^2 + y^2} \right) = -\frac{4xy}{(x^2 + y^2)^2}, \text{ luego, } f_{xy}(1, 1) = -1$$

Con lo cual se demuestra el teorema de Clairaut

3.3. Incrementos y diferenciales

Sea $u = f(x, y)$ una función definida y acotada en un dominio D al cual pertenece el punto (a, b) y que tiene derivadas parciales en ese punto, se establece entonces $f(x, y)$ que es diferenciable en (a, b) si la variación total, $\Delta u = f(a + \Delta x, b + \Delta y) - f(a, b)$ correspondiente a las variaciones Δx y Δy se pueden escribir como,

$$\Delta u = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)\Delta y$$

Donde a la parte Δx y Δy se le llama el diferencial $du = f(x, y)$ en el punto (a, b)

De manera general, el diferencial de la función está dada por la variación (incremento/decremento) respecto a su variable $u = f(x, y)$

$$d(u) = \frac{\partial u}{\partial x}(dx) + \frac{\partial u}{\partial y}(dy) + \dots$$

df = que se puede resumir como $\sum \frac{\partial f}{\partial x_i}$ donde x_i es cualquier variable

Ejemplo 3.18. Hallar la diferencial total de la función $z = 2x \operatorname{sen} y - 3x^2 y^2$

Solución

Por definición, $dz = \frac{\partial z}{\partial x}(dx) + \frac{\partial z}{\partial y}(dy) = (2\operatorname{sen} y - 6xy^2)dx + (2xcosy - 6x^2y)dy$

Ejemplo 3.19. Utilizar la diferencial dz para aproximar el cambio en $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ cuando se desplaza del punto $(1, 1)$ al punto $(1.01, 0.97)$. Comparar esta aproximación con el cambio exacto en z .

Solución

Considerando $(x, y) = (1, 1)$ y $(x + \Delta x, y + \Delta y) = (1.01, 0.97)$, se obtiene, $dx = \Delta x = 0.01, dy = \Delta y = -0.03$, es decir, el cambio en z se aproxima a,

$$\Delta z = dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = -\frac{x}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}} \Delta x - \frac{y}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}} \Delta y$$

Además, $x = 1, y = 1, \Delta x = 0.01, \Delta y = -0.03$,

$$\Delta z = -\frac{1}{\sqrt{4 - 1^2 - 1^2}} (0.01) - \frac{1}{\sqrt{4 - 1^2 - 1^2}} (-0.03) = \frac{0.02}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{100} \cong 0.0141.$$

No obstante, el cambio exacto corresponde a la diferencia entre la función sujeta al incremental menos la función en el punto dado, o sea, esta diferencia está dada por,

$$\Delta z = f(1.01, 0.97) - f(1, 1) = \sqrt{4 - (1.01)^2 - (0.97)^2} - \sqrt{4 - 1^2 - 1^2} \cong 0.0137$$

Ejemplo 3.20. En la construcción de una caja rectangular de 70 cm x 60 cm x 40 cm y se tiene un rango de tolerancia en todas sus medidas de 2 mm ¿Cuál es error más grande? Y el error relativo en el volumen calculado de la caja.

Solución

El volumen de una caja prismática se halla mediante la fórmula:

$$V_{caja} = A_b \cdot h = A \cdot B \cdot C$$

Hallando las diferenciales de cada uno de los elementos, se tiene,

$$dA = \pm 0.2 \text{ cm} \quad dB = \pm 0.2 \text{ cm} \quad dC = \pm 0.2 \text{ cm}$$

Después hay que obtener su diferencial total

$$dV = \frac{\partial V}{\partial A} (dA) + \frac{\partial V}{\partial B} (dB) + \frac{\partial V}{\partial C} (dC)$$

$$dV = BC(dA) + AC(dB) + AB(dC)$$

Evaluando, se tiene,

$$dV = (60)(40)(0.2) + (70)(40)(0.2) + (70)(60)(0.2) = 1880 \text{ cm}^3$$

Como el volumen medido corresponde a, $V = (70)(60)(40) = \text{cm}^3$, luego el error relativo

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{1880}{168000} = 1.11\%$$

3.3.1. Regla de la cadena en el Diferencial Total

En una función de una variable $f(x, y)$ y $g(x, y)$ es función que trabaja en dos variables las dos funciones quedan definidas como:

$$(f \circ g)(x, y) = f(g(x, y))$$

La ecuación determina la base en la que se está trabajando la función respecto a las variables intermedias, dependientes e independientes.

$$\frac{d(u)}{d(t)} = \frac{\partial u}{\partial x} \left(\frac{dx}{dt} \right) + \frac{\partial u}{\partial y} \left(\frac{dy}{dt} \right) + \dots$$

Tabla 1

Variable dependiente, intermedia e independiente

Variable Dependiente	Variable Intermedia	Variable Independiente
u	x	t
	y	
	z	

Nota: Autor (2024)

$$\frac{d(u)}{d(t)} = \frac{\partial u}{\partial x} \left(\frac{dx}{dt} \right) + \frac{\partial u}{\partial y} \left(\frac{dy}{dt} \right) + \frac{\partial u}{\partial z} \left(\frac{dz}{dt} \right)$$

Ejemplo 3.21. Sea $f(x, y) = (6x^2 + 2xy - y^2)^4$, hallar $\partial f / \partial x = f_x$, $\partial f / \partial y = f_y$

Solución. De la derivada de una potencia, se tiene, $f_x = nu^{n-1} \cdot u'$, o sea,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x = 4(6x^2 + 2xy - y^2)^3(6x^2 + 2xy - y^2)' = 4(12x + 2y)(6x^2 + 2xy - y^2)^3$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = f_y = 4(6x^2 + 2xy - y^2)^3(6x^2 + 2xy - y^2)' = 4(2x - 2y)(6x^2 + 2xy - y^2)^3$$

Ejemplo 3.22. Hallar $\partial f / \partial t = f_t$ si $f(x, y) = x^2 + y^2$, $x = e^t$, $y = e^{-t}$

Solución

Recordando la Regla de la Cadena, se tiene,

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} = (2x)(e^t) + (2y)(-e^{-t}) = 2xe^t - 2ye^{-t} = 2e^{2t} - 2e^{-2t}$$

Ejemplo 3.23. Hallar $\partial z / \partial u$, $\partial z / \partial v$, si $z = x^2 - y^2$, $x = e^{2u-3v}$, $y = \cos(u^2 - v^2)$

Solución

A partir de la Regla de la Cadena, se tiene,

$$\frac{dz}{du} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{du} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{du}, \quad \frac{dz}{dv} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dv} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dv}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x, \quad \frac{dx}{du} = 2e^{2u-3v}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -2y, \quad \frac{dy}{du} = 2u \cos(u^2 - v^2)$$

$$\frac{dx}{dv} = -3e^{2u-3v}, \quad \frac{dy}{dv} = -2v \cos(u^2 - v^2)$$

$$\frac{dz}{du} = 2x(2e^{2u-3v}) - 3y^2(2u \cos(u^2 - v^2)) = 4xe^{2u-3v} - 6uy^2 \cos(u^2 - v^2)$$

$$\frac{dz}{dv} = 2x(-3e^{2u-3v}) - 3y^2(-2v \cos(u^2 - v^2)) = -6xe^{2u-3v} + 6vy^2 \cos(u^2 - v^2)$$

Ejemplo 3.24. Dos partículas recorren trayectorias elípticas dadas por las siguientes ecuaciones paramétricas:

Primera partícula: $x_1 = 4 \cos t, y_1 = 2 \sin t$

Segunda partícula: $x_2 = 2 \sin 2t, y_2 = 3 \cos 2t$

¿A qué velocidad cambia la distancia entre las dos partículas cuando $t = \pi$?

Solución. De geometría analítica se tiene que la distancia entre dos puntos está dada por,

$$s = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Luego, para $t = \pi$, se tiene,

$x_1 = 4 \cos \pi = -4, y_1 = 2 \sin \pi = 0, x_2 = 2 \sin 2\pi = 0, y_2 = 3 \cos 2\pi = 3,$ por tanto,

$$s = \sqrt{(0 + 4)^2 + (3 - 0)^2} = \sqrt{16 + 9} = 5$$

Las derivadas parciales para $t = \pi$, y, en su orden corresponden a las siguientes:

$$\frac{\partial s}{\partial x_1} = \frac{-(x_2 - x_1)}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}} = -\frac{1}{5}(0 + 4) = -\frac{4}{5}$$

$$\frac{\partial s}{\partial y_1} = \frac{-(y_2 - y_1)}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}} = -\frac{1}{5}(3 - 0) = -\frac{3}{5}$$

$$\frac{\partial s}{\partial x_2} = \frac{(x_2 - x_1)}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}} = \frac{1}{5}(0 + 4) = \frac{4}{5}$$

$$\frac{\partial s}{\partial y_2} = \frac{(y_2 - y_1)}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}} = \frac{1}{5}(3 - 0) = \frac{3}{5}$$

Además, $t = \pi$, las derivadas de x_1, x_2, y_1, y_2 corresponden a,

$$\frac{dx_1}{dt} = -4 \sin t = -4 \sin \pi = 0, \quad \frac{dy_1}{dt} = 2 \cos t = -2$$

$$\frac{dx_2}{dt} = 4 \cos 2t = 4 \cos 2\pi = 4, \quad \frac{dy_2}{dt} = -6 \sin 2t = 0$$

Por tanto, la distancia cambia a una velocidad o ritmo dada por:

$$\frac{ds}{dt} = \frac{\partial s}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial s}{\partial y_1} \frac{dy_1}{dt} + \frac{\partial s}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} + \frac{\partial s}{\partial y_2} \frac{dy_2}{dt}$$

$$\frac{ds}{dt} = \left(-\frac{4}{5}\right)(0) + \left(-\frac{3}{5}\right)(-2) + \left(\frac{4}{5}\right)(4) + \left(\frac{3}{5}\right)(0) = \frac{22}{5}$$

3.3.2. Derivada parcial implícita

La regla de la cadena puede ser llevada a resolución de problemas sobre derivadas Implícitas, para lo cual se requiere cumplir con las siguientes características:

La función $F(x, y)$ debe de estar igualada con 0, además se considera que $y = f(x)$ y es una función derivable en “x”, por tanto, se considera:

$z = F(x, y) = F(x, f(x)) = 0$, además,

$$F_x(x, y) \frac{dx}{dx} + F_y(x, y) \frac{dy}{dx} = 0, \text{ es decir, } \frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}$$

Podemos resumir escribiendo la derivada parcial implícita para dos variables como sigue:

$$\frac{dy}{dx} = -\left(\frac{\frac{\partial z}{\partial x}}{\frac{\partial z}{\partial y}}\right) \quad \frac{dz}{dy} = -\left(\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}\right) \quad \frac{dz}{dx} = -\left(\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}\right)$$

Ejemplo 3.25. Encontrar la derivada de la siguiente función mediante derivadas parciales:

$$z = 2xy^2 - 3x^2y$$

El primer paso es igualar a 0 las derivadas parciales de la función respecto a sus variables:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2y^2 - 6xy; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 4xy - 3x^2$$

Por último, paso se iguala la derivada con las parciales:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}, \text{ o sea, } \frac{dy}{dx} = \frac{6xy - 2y^2}{4xy - 3x^2}$$

Ejemplo 3.26. Sea $3x^2z - x^2y^2 + 2z^3 + 3yz - 5 = 0$, hallar $\partial z / \partial x$, $\partial z / \partial y$

Solución. Escribiendo, $F(x, y, z) = 3x^2z - x^2y^2 + 2z^3 + 3yz - 5$ y derivando, se tiene,

$$F_x(x, y, z) = 6xz - 2xy^2, F_y(x, y, z) = -2x^2y + 3z, F_z(x, y, z) = 3x^2 + 6z^2 + 3y$$

Con lo cual se tiene,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x(x, y, z)}{F_z(x, y, z)} = \frac{2xy^2 - 6xz}{3x^2 + 6z^2 + 3y}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y(x, y, z)}{F_z(x, y, z)} = \frac{2x^2y - 3z}{3x^2 + 6z^2 + 3y}$$

3.4. Gradiente

Repasando lo visto en el capítulo III, dada la función escalar definida por $\phi(x, y, z)$, siendo esta diferenciable en cada punto $P(x, y, z)$ de cierta región del espacio (es decir, ϕ define un campo escalar diferenciable), entonces, el gradiente de ϕ , que se denota por $\nabla\phi$ o como $\text{grad } \phi$, se define como sigue:

$$\nabla\phi = \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \right) \phi = \frac{\partial\phi}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z} \mathbf{k}$$

Recordándose que la operación $\nabla\phi$ siempre devuelve un campo vectorial.

Ejemplo 3.27. Sea la función $\phi(x, y, z) = 3xy^3 - y^2z^2$, se pide determinar $\nabla\phi$ en el punto $P(1,1,2)$.

Solución

$$\begin{aligned} \text{grad } \phi &= \nabla\phi = \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \right) (3xy^3 - y^2z^2) \\ &= \frac{\partial(3xy^3)}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial(3xy^3 - y^2z^2)}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial(-y^2z^2)}{\partial z} \mathbf{k} \\ &= 3y^3 \mathbf{i} + (9xy^2 - 2yz^2) \mathbf{j} - 2y^2z \mathbf{k} \end{aligned}$$

Evaluando en $P(1,1,2)$, se tiene,

$$\nabla\phi(1,1,2) = 3(1)^3 \mathbf{i} + [9(1)(1)^2 - 2(1)(2)^2] \mathbf{j} - 2(1)^2(2) \mathbf{k} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j} - 4\mathbf{k}$$

Ejemplo 3.28. Sea la función $\phi(x, y, z) = \ln(x^2 + y^3 - z^4)$, se pide determinar $\nabla\phi$ en el punto $P(5,3,-1)$.

Solución

$$\begin{aligned} \text{grad } \phi &= \nabla\phi = \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \right) \ln(x^2 + y^3 - z^4) \\ &= \frac{\partial \ln(x^2 + y^3 - z^4)}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial \ln(x^2 + y^3 - z^4)}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial \ln(x^2 + y^3 - z^4)}{\partial z} \mathbf{k} \\ &= \frac{(2x\mathbf{i} + 3y^2\mathbf{j} - 4z^3\mathbf{k})}{x^2 + y^3 - z^4} \end{aligned}$$

Evaluando en $P(5,3,-1)$, se tiene,

$$\nabla\phi(5,3,-1) = \frac{2(5)\mathbf{i} + 3(3)^2\mathbf{j} - 4(-1)^3\mathbf{k}}{5^2 + 3^3 - (-1)^4} = \frac{1}{51}(10\mathbf{i} + 27\mathbf{j} + 4\mathbf{k})$$

Ejemplo 3.29. Encuentre una normal unitaria a la superficie $-x^2yz^2 + 2xy^2z = 1$ en el punto $P(1,1,1)$.

Solución

Sea $\phi = -x^2yz^2 + 2xy^2z$, por definición el gradiente, $\nabla\phi(1,1,1)$ es normal a la superficie $-x^2yz^2 + 2xy^2z = 1$ en el punto $P(1,1,1)$, por tanto se tiene,

$$\begin{aligned} \nabla\phi &= \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right)(-x^2yz^2 + 2xy^2z) \\ &= (-2xyz^2 + 2y^2z)\mathbf{i} + (-x^2z^2 + 4xyz)\mathbf{j} + (-2x^2yz + 2xy^2)\mathbf{k} \end{aligned}$$

Entonces, $\nabla\phi(1,1,1) = 0\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 0\mathbf{k} = 3\mathbf{j}$, luego $\|\nabla\phi(1,1,1)\| = \|3\mathbf{j}\| = 3$

Así, en el punto $P(1,1,1)$ $\frac{3\mathbf{j}}{3} = \mathbf{j}$, es una normal unitaria a $-x^2yz^2 + 2xy^2z = 1$

Ejemplo 3.30. Dada la superficie $x^2yz - 4xyz^2 = -6$ en el punto $P(1,2,1)$, se pide determinar la ecuación del plano tangente.

Solución

$$\begin{aligned} \text{Sea } &\left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right)(x^2yz - 4xyz^2) \\ &= \nabla(x^2yz - 4xyz^2) = (2xyz - 4yz^2)\mathbf{i} + (x^2z - 4xz^2)\mathbf{j} + (x^2y - 8xyz)\mathbf{k} \end{aligned}$$

Al evaluar el gradiente en el punto $P(1,2,1)$ se obtiene, $\nabla\phi = -4\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 14\mathbf{k}$, por tanto, $4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 14\mathbf{k}$, es normal a la superficie en P. Además, una ecuación del plano con normal $N = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$ tiene la forma: $ax + by + cz = \lambda$

Por lo que la ecuación puede ser escrita como: $4x + 3y + 14z = \lambda$. Al sustituir P en la ecuación obtenemos $\lambda = 24$, entonces, la ecuación requerida es $4x + 3y + 14z = 24$.

3.4.1. Derivadas direccionales

Dada una función escalar $\phi = \phi(x, y, z)$, entonces, la derivada direccional de ϕ en dirección de un vector \mathbf{A} , la cual se denota por $D_{\mathbf{A}}(\phi)$. Si $\mathbf{a}_u = \mathbf{A}/\|\mathbf{A}\|$, el vector unitario en dirección de \mathbf{A} , entonces se tiene,

$$D_{\mathbf{A}}(\phi) = \nabla\phi \cdot \mathbf{a}_u = \nabla\phi \cdot \frac{\mathbf{A}}{\|\mathbf{A}\|}$$

Donde la notación \mathbf{a}_u corresponde a la de un vector unitario.

Ejemplo 3.31. Calcular la derivada direccional de la función escalar $\phi(x, y) = e^{x \operatorname{sen} y}$ en el punto $P(0, \pi/3)$ y en la dirección del vector $\mathbf{a} = (-3, 4)$.

Solución

$$\begin{aligned} \text{a) Grad } \phi &= \nabla\phi = \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j}\right)(e^x \operatorname{sen} y) \\ &= \frac{\partial(e^x \operatorname{sen} y)}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial(e^x \operatorname{sen} y)}{\partial y}\mathbf{j} \\ &= e^x \operatorname{sen} y \mathbf{i} + e^x \cos y \mathbf{j} \end{aligned}$$

$$\text{b) en } P(0, \pi/3), \operatorname{grad} \phi = \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j}$$

c) Se determina el vector unitario $\mathbf{a}_u = ((-3, 4)) / \sqrt{5}$ en dirección de \mathbf{A} . Después, se obtiene la derivada direccional de ϕ en el punto $P(0, \pi/3)$ en dirección de \mathbf{A} , es decir:

$$\nabla\phi \cdot \mathbf{a} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j}\right) \left(-\frac{3}{5}\mathbf{i} + \frac{4}{5}\mathbf{j}\right) = \frac{4 - \sqrt{3}}{6}$$

Ejemplo 3.32. Considere la función escalar $\phi(x, y, z) = x^2 + y^2 + xz$. Se pide determinar:

a) El grad ϕ . b) Encuentre grad ϕ en el punto $P = P(2, -1, 3)$. c) La derivada direccional de ϕ en el punto P en dirección de $\mathbf{A} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$.

Solución

$$\begin{aligned} \text{a) Grad } \phi = \nabla\phi &= \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right)(x^2 + y^2 + xz) \\ &= \frac{\partial(x^2 + y^2 + xz)}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial(x^2 + y^2 + xz)}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial(x^2 + y^2 + xz)}{\partial z}\mathbf{k} \\ &= (2x + z)\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + x\mathbf{k} \end{aligned}$$

$$\text{b) En } P(2, -1, 3), \operatorname{grad} \phi = 7\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$$

c) Se determina el vector unitario $\mathbf{a}_u = \mathbf{A}/\|\mathbf{A}\| = (\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k})/\sqrt{6}$ en dirección de \mathbf{A} . Después, se obtiene la derivada direccional de ϕ en el punto $P(2, -1, 3)$ en dirección de \mathbf{A} , es decir: $\nabla\phi \cdot \mathbf{a}_u = (7\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}) \cdot [(\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k})/\sqrt{6}] = 6/\sqrt{6} = \sqrt{6}/6$

Ejercicio 3.33. Sea el campo escalar definido por, $\phi = x^2 yz - 4xyz^2$, se pide determinar la derivada direccional del vector $\mathbf{A} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$.

Solución

A partir de: $\nabla\phi = \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right)(x^2 yz - 4xyz^2)$, se tiene que,

$$\nabla\phi = (2xyz - 4yz^2)\mathbf{i} + (x^2 z - 4xz^2)\mathbf{j} + (x^2 y - 8xyz)\mathbf{k}, \text{ y en } P(1, 3, 1)$$

$\nabla\phi(1, 3, 1) = -6\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 21\mathbf{k}$, luego, el vector unitario en dirección de $\mathbf{A} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ es,

$$\mathbf{A}_u = \frac{2\mathbf{i} - \mathbf{j} - 2\mathbf{k}}{\sqrt{(2)^2 + (-1)^2 + (-2)^2}} = \frac{2}{3}\mathbf{i} - \frac{1}{3}\mathbf{j} - \frac{2}{3}\mathbf{k}$$

Así, la derivada direccional requerida es

$$\nabla\phi(1,3,1) \cdot \mathbf{A}_u = (-6\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 21\mathbf{k}) \cdot \left(\frac{2}{3}\mathbf{i} - \frac{1}{3}\mathbf{j} - \frac{2}{3}\mathbf{k}\right) = -4 + 1 + 14 = 11$$

Ejemplo 3.34. Sea el campo escalar: $\phi = x^2y^3z^6 \cdot a$ ¿En qué dirección a partir del punto $P(1,1,1)$ la derivada direccional de ϕ es un máximo? b) ¿Cuál es la magnitud de este máximo?

Solución

Sea $\nabla\phi = \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right)(x^2y^3z^6)$, luego se tiene que

$$\nabla\phi = \nabla(x^2y^3z^6) = 2xy^3z^6\mathbf{i} + 3x^2y^2z^6\mathbf{j} + 6x^2y^3z^5\mathbf{k}, \text{ por tanto,}$$

$$\nabla\phi(1,1,1) = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k}.$$

a) La derivada direccional es un máximo en la dirección de $\nabla\phi(1,1,1) = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$.

b) La magnitud de este máximo es $|\nabla\phi(1,1,1)| = \sqrt{(2)^2 + (3)^2 + (6)^2} = 7$.

Ejemplo 3.35. Encuentre el ángulo entre las superficies definida por los campos escalares

$$\phi_1 = x^2 + y^2yz, \phi_2 = \left(x - \frac{\sqrt{6}}{6}\right)^2 + \left(y - \frac{\sqrt{6}}{6}\right)^2, \text{ en el punto } P\left(\frac{\sqrt{6}}{12}, \frac{\sqrt{6}}{12}, \frac{1}{12}\right)$$

Solución

El ángulo entre las superficies en el punto se define como el ángulo entre las normales a las superficies en este punto, es decir,

$$\text{Sean, } \phi_1 = x^2 + y^2 - z, \phi_2 = \left(x - \frac{\sqrt{6}}{6}\right)^2 + \left(y - \frac{\sqrt{6}}{6}\right)^2 \text{ donde una normal a}$$

$$z = x^2 + y^2, \nabla\phi_1 = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} - \mathbf{k} \text{ y } \nabla\phi_1\left(\frac{\sqrt{6}}{12}, \frac{\sqrt{6}}{12}, \frac{1}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}}{6}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{6}}{6}\mathbf{j} - \mathbf{k}$$

$$\text{y una normal a, } z = \left(x - \frac{\sqrt{6}}{6}\right)^2 + \left(y - \frac{\sqrt{6}}{6}\right)^2 \text{ corresponde a,}$$

$$\nabla\phi_2 = 2\left(x - \frac{\sqrt{6}}{6}\right)\mathbf{i} + 2\left(y - \frac{\sqrt{6}}{6}\right)\mathbf{j} - \mathbf{k} \text{ y } \nabla\phi_2\left(\frac{\sqrt{6}}{12}, \frac{\sqrt{6}}{12}, \frac{1}{12}\right) = -\frac{\sqrt{6}}{6}\mathbf{i} - \frac{\sqrt{6}}{6}\mathbf{j} - \mathbf{k}$$

Ahora, $(\nabla\phi_1(P)) \cdot (\nabla\phi_2(P)) = \|\nabla\phi_1(P)\| \|\nabla\phi_2(P)\| \cos \theta$, θ es el ángulo requerido.

$$\left(\frac{\sqrt{6}}{6}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{6}}{6}\mathbf{j} - \mathbf{k}\right) \cdot \left(-\frac{\sqrt{6}}{6}\mathbf{i} - \frac{\sqrt{6}}{6}\mathbf{j} - \mathbf{k}\right) = \left\|\frac{\sqrt{6}}{6}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{6}}{6}\mathbf{j} - \mathbf{k}\right\| \left\|-\frac{\sqrt{6}}{6}\mathbf{i} - \frac{\sqrt{6}}{6}\mathbf{j} - \mathbf{k}\right\| \cos \theta$$

$$\left(-\frac{1}{6} - \frac{1}{6} + 1\right) = \left[\sqrt{\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + 1} \sqrt{\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + 1}\right] \cos \theta, \text{ o sea, } \cos \theta = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{3}} = \frac{1}{2}$$

Entonces, el ángulo agudo correspondiente es, $\theta = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = 60^\circ$

3.4.2. Multiplicadores de Lagrange

Los multiplicadores de Lagrange a la técnica matemática empleada en hallar los máximos y mínimos relativos de funciones de múltiples variables sujetas a restricciones. El método funciona introduciendo nuevas variables (una por cada restricción) llamadas multiplicadores de Lagrange. Estas variables se combinan con la función original para crear una nueva función sin restricciones llamada la función lagrangiana.

Es decir, se trata de encontrar los puntos (x, y) que son los extremos (valores máximo o mínimo) de una función $f(x, y)$ sujeta a la restricción $g(x, y) = d$, donde d es una constante, para lo cual, se trata de hallar los puntos (x_1, x_2, \dots, x_n) que determinan los extremos (valores máximo o mínimo) de una función $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ sujeta a la restricción $g(x_1, x_2, \dots, x_n) = d$, donde d es una constante, lo cual ocurre cuando los gradientes ∇f y ∇g (derivadas direccionales) sean ortogonales a la curva o superficie dada $g(x, y) = d$, es decir, si ∇f y ∇g son paralelos, debe haber una constante λ tal que $\nabla f = \lambda \nabla g$.

La letra griega λ (lambda) se usa para denotar al multiplicador de Lagrange. La condición $\nabla f = \lambda \nabla g$ y la restricción original generan $(n + 1)$ ecuaciones, en este caso tres ecuaciones, con las incógnitas x, y y λ , generan el sistema:

$$f_x(x, y) = \lambda g_x(x, y),$$

$$f_y(x, y) = \lambda g_y(x, y), \text{ y además,}$$

$$g(x, y) = d$$

Las soluciones del sistema para x y y producen los valores de los extremos de $f(x, y)$ sujetos a la restricción $g(x, y) = d$.

Ejemplo 3.36. Minimizar la función $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ que está sujeta a la restricción $g(x, y) = 2x + y = 9$.

Solución

Con el uso de la condición $\nabla f = \lambda \nabla g$ y la restricción dada, se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} \frac{\partial(x^2 + 2y^2)}{\partial x} = \lambda \frac{\partial(2x + y)}{\partial x} \rightarrow 2x = 2\lambda \\ \frac{\partial(x^2 + 2y^2)}{\partial y} = \lambda \frac{\partial(2x + y)}{\partial y} \rightarrow 4y = \lambda \\ 2x + y = 9 \end{cases}$$

Al eliminar λ de las dos primeras ecuaciones obtenemos $x = 4y$, que con $2x + y = 9$ produce $9y = 9$. De este modo obtenemos la solución $y = 1$ y $x = 4$. Entonces, $f(4,1) = 16 + 2 = 18$ es el valor mínimo de f sujeto a la restricción $2x + y = 9$.

Ejemplo 3.37. Determinar los extremos de la función $f(x, y) = x^3 + 3xy^2$ que está sujeta a la restricción $g(x, y) = x^2 + y^2 = 4$.

Solución

Por definición, se tiene,
$$\begin{cases} \frac{\partial(x^3+3xy^2)}{\partial x} = \lambda \frac{\partial(x^2+y^2)}{\partial x} \rightarrow 3x^2 + 3y^2 = 2\lambda x \\ \frac{\partial(x^3+3xy^2)}{\partial y} = \lambda \frac{\partial(x^2+y^2)}{\partial y} \rightarrow 6xy = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

De la segunda ecuación se obtiene, $\lambda = 3x$, con lo cual se consigue el sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ x^2 - y^2 = 0 \end{cases}$$

que al ser resuelto nos proporciona, $x = \pm\sqrt{2}, y = \pm\sqrt{2}$, que al

reemplazar en $f(x, y) = x^3 + 3xy^2$, finalmente se tiene:

$$f_1(x, y) = (\sqrt{2})^3 + 3(\sqrt{2})(\sqrt{2})^2 = 8\sqrt{2}; f_2(x, y) = (-\sqrt{2})^3 + 3(-\sqrt{2})(-\sqrt{2})^2 = -8\sqrt{2}$$

$$f_3(x, y) = (\sqrt{2})^3 + 3(\sqrt{2})(-\sqrt{2})^2 = 8\sqrt{2}; f_4(x, y) = (-\sqrt{2})^3 + 3(-\sqrt{2})(\sqrt{2})^2 = -8\sqrt{2}$$

Donde los puntos $P_1(\sqrt{2}, 8\sqrt{2}), P_3(\sqrt{2}, -8\sqrt{2})$, son máximos absolutos, y $P_2(-\sqrt{2}, 8\sqrt{2})$ y $P_4(-\sqrt{2}, -8\sqrt{2})$ son mínimos absolutos.

3.5. Divergencia

La divergencia en un punto nos da una medida de cómo se comporta un campo vectorial en ese punto específico. En términos simples, si el campo está "entrando" o "saliendo" del punto, o sea, dado el vector definido por $\mathbf{V}(x, y, z) = V_1\mathbf{i} + V_2\mathbf{j} + V_3\mathbf{k}$, el

cual es diferenciable en cada punto (x, y, z) en una región del espacio, \mathbf{V} define un campo vectorial diferenciable, luego, la divergencia de \mathbf{V} , que se denota con $\nabla \cdot \mathbf{V}$ o $\text{div } \mathbf{V}$, se define como sigue:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{V} &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \right) \cdot (V_1 \mathbf{i} + V_2 \mathbf{j} + V_3 \mathbf{k}) \\ &= \frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial y} + \frac{\partial V_3}{\partial z}\end{aligned}$$

Lo cual significa que aun cuando \mathbf{V} es un vector, $\nabla \cdot \mathbf{V}$ corresponde a un escalar.

Ejemplo 3.38. Suponga el campo vectorial definido por $\mathbf{A} = x^2 z^2 \mathbf{i} - 2y^2 z^2 \mathbf{j} + xy^2 z \mathbf{k}$, se pide determinar $\nabla \cdot \mathbf{A}$ (o $\text{div } \mathbf{A}$) en el punto $P(1, -1, 1)$.

Solución

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{A} &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \right) \cdot (x^2 z^2 \mathbf{i} - 2y^2 z^2 \mathbf{j} + xy^2 z \mathbf{k}) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} (x^2 z^2) + \frac{\partial}{\partial y} (-2y^2 z^2) + \frac{\partial}{\partial z} (xy^2 z) = 2xz^2 - 4yz^2 + xy^2\end{aligned}$$

Luego al evaluar este resultado en el punto $P(1, -1, 1)$, se tiene,

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 2(1)(1)^2 - 4(-1)(1)^2 + (1)(-1)^2 = 7$$

Interpretación:

En virtud de que la divergencia es positiva, ello indica que el campo está saliendo del punto, como si fuera una fuente.

Ejemplo 3.39. Suponga el campo vectorial definido por $\mathbf{A} = x^2 y \mathbf{i} + 2xz \mathbf{j} + 4 - z^2 y \mathbf{k}$, se pide determinar $\nabla \cdot \mathbf{A}$ (o $\text{div } \mathbf{A}$) en el punto $P(1, 1, 2)$.

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{A} &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \right) \cdot (x^2 y \mathbf{i} + 2xz \mathbf{j} + 4 - z^2 y \mathbf{k}) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} (x^2 y) + \frac{\partial}{\partial y} (2xz) + \frac{\partial}{\partial z} (4 - z^2 y) = y^2 + 0 - 2zy = y^2 - 2zy\end{aligned}$$

Luego al evaluar este resultado en el punto $P(1, 1, 2)$, se tiene,

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = (1)^2 - 2(2)(1) = -3$$

Interpretación:

En virtud de que la divergencia es negativa, ello indica que el campo está entrando al punto, como si fuera un sumidero.

3.6. Rotacional

Suponga que $V(x, y, z) = V_1\mathbf{i} + V_2\mathbf{j} + V_3\mathbf{k}$ es un campo vectorial diferenciable. Entonces, el rotacional o rotación de V , que se denota $\nabla \times V$, rotacional V o $\text{rot } V$, se define como sigue:

$$\begin{aligned} \nabla \times V &= \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k} \right) \times (V_1\mathbf{i} + V_2\mathbf{j} + V_3\mathbf{k}) \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_1 & V_2 & V_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_2 & V_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_1 & V_3 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ V_1 & V_2 \end{vmatrix} \mathbf{k} \\ &= \left(\frac{\partial V_3}{\partial y} - \frac{\partial V_2}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial V_1}{\partial z} - \frac{\partial V_3}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial V_2}{\partial x} - \frac{\partial V_1}{\partial y} \right) \mathbf{k} \end{aligned}$$

Se observa que, en la expansión del determinante, los operadores $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$ deben preceder a V_1, V_2 y V_3 .

Ejemplo 3.40. Dado el vector $A = x^2z^2\mathbf{i} - 2y^2z^2\mathbf{j} + xy^2z\mathbf{k}$, se pide determinar $\nabla \times A$ (o $\text{rot } A$) en el punto $P(1, -1, 1)$.

Solución

$$\begin{aligned} \nabla \times A &= \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k} \right) \times (x^2z^2\mathbf{i} - 2y^2z^2\mathbf{j} + xy^2z\mathbf{k}) \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2z^2 & -2y^2z^2 & xy^2z \end{vmatrix} \\ &= \left[\frac{\partial}{\partial y}(xy^2z) - \frac{\partial}{\partial z}(-2y^2z^2) \right] \mathbf{i} - \left[\frac{\partial}{\partial x}(xy^2z) - \frac{\partial}{\partial z}(x^2z^2) \right] \mathbf{j} + \left[\frac{\partial}{\partial x}(-2y^2z^2) - \frac{\partial}{\partial y}(x^2z^2) \right] \mathbf{k} \\ &= (2xyz + 4y^2z)\mathbf{i} - (y^2z - 2x^2z)\mathbf{j} + 0\mathbf{k} \\ &= (2xyz + 4y^2z)\mathbf{i} - (y^2z - 2x^2z)\mathbf{j} \end{aligned}$$

Luego, en el punto $P(1, -1, 1)$, el rotacional corresponde a:

$$\nabla \times A = [2(1)(-1)(1) + 4(-1)^2(1)]\mathbf{i} - [(1)^2(1) - 2(1)^2(1)]\mathbf{j} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$$

Ejemplo 3.41. Dado el vector $A = xe^{yz}\mathbf{i} + ye^{xz}\mathbf{j} + ze^{xy}\mathbf{k}$, se pide determinar $\nabla \times A$ (o $\text{rot } A$) en el punto $P(1, 1, -1)$.

Solución

$$\nabla \times A = \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k} \right) \times (xe^{yz}\mathbf{i} + ye^{xz}\mathbf{j} + ze^{xy}\mathbf{k})$$

$$\begin{aligned}
 &= \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xe^{yz} & ye^{xz} & ze^{xy} \end{bmatrix} \\
 &= \left[\frac{\partial}{\partial y}(ze^{xy}) - \frac{\partial}{\partial z}(ye^{xz}) \right] \mathbf{i} - \left[\frac{\partial}{\partial x}(ze^{xy}) - \frac{\partial}{\partial z}(xe^{yz}) \right] \mathbf{j} + \left[\frac{\partial}{\partial x}(ye^{xz}) - \frac{\partial}{\partial y}(xe^{yz}) \right] \mathbf{k} \\
 &= (xze^{xy} - xye^{xz}) \mathbf{i} - (yze^{xy} - xye^{yz}) \mathbf{j} + (ye^{xz} - xze^{yz}) \mathbf{k} \\
 &= x(ze^{xy} - ye^{xz}) \mathbf{i} + y(xe^{yz} - ze^{xy}) \mathbf{j} + z(ye^{xz} - xe^{yz}) \mathbf{k}
 \end{aligned}$$

Luego, en el punto $P(1, 1, -1)$, el rotacional corresponde a:

$$\begin{aligned}
 \nabla \times \mathbf{A} &= (1)[(e^1)(-1) - (e^{-1})(1)] \mathbf{i} + (1)[(e^1)(-1) - (e^{-1})(1)] \mathbf{j} \\
 &\quad + (-1)[(e^{-1})(1) - (e^{-1})(1)] \mathbf{k} \\
 \nabla \times \mathbf{A} &= (e - e^{-1}) \mathbf{i} - (e + e^{-1}) \mathbf{j} + 0 \mathbf{k}
 \end{aligned}$$

3.6.1. Fórmulas que involucran al operador ∇

Las proposiciones siguientes generan algunas propiedades útiles al emplear el operador ∇ .

Proposición 5.1: Suponga que \mathbf{A} y \mathbf{B} son funciones vectoriales diferenciables, y que ϕ y ψ son funciones escalares diferenciables de posición (x, y, z) , entonces, se cumplen las leyes siguientes:

- i. $\nabla(\phi + \psi) = \nabla\phi + \nabla\psi$ o bien $\text{grad}(\phi + \psi) = \text{grad}\phi + \text{grad}\psi$
- ii. $\nabla \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \nabla \cdot \mathbf{A} + \nabla \cdot \mathbf{B}$ o bien $\text{div}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \text{div}\mathbf{A} + \text{div}\mathbf{B}$
- iii. $\nabla \times (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times \mathbf{B}$ o bien $\text{rot}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \text{rot}\mathbf{A} + \text{rot}\mathbf{B}$
- iv. $\nabla \cdot (\phi\mathbf{A}) = (\nabla\phi) \cdot \mathbf{A} + \phi(\nabla \cdot \mathbf{A})$
- v. $\nabla \times (\phi\mathbf{A}) = (\nabla\phi) \times \mathbf{A} + \phi(\nabla \times \mathbf{A})$
- vi. $\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})$
- vii. $\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{A}) - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{B})$
- viii. $\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} + (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B})$

Proposición 5.2: Suponga que ϕ y \mathbf{A} son respectivamente funciones escalar y vectorial, diferenciables, y que ambas tienen segundas derivadas parciales continuas. Entonces, se cumplen las siguientes leyes:

- i. $\nabla \cdot (\nabla\phi) = \nabla^2\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$
 Donde, $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ se llama el operador laplaciano
- ii. $\nabla \times (\nabla\phi) = 0$, es decir, el rotacional del gradiente del campo escalar ϕ es igual a cero.

iii. $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$, es decir, la divergencia del rotacional del campo vectorial \mathbf{A} es igual a cero

iv. $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$

Ejemplo 3.42. Suponga que P y Q son funciones escalares diferenciables en x , y y z .

Se pide demostrar que:

a. $\nabla(P + Q) = \nabla P + \nabla Q$, b) $\nabla(PQ) = P\nabla Q + Q\nabla P$

Solución

$$\begin{aligned} \text{a. } \nabla(P + Q) &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \right) (P + Q) \\ &= \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} (P + Q) + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} (P + Q) + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} (P + Q) \\ &= \mathbf{i} \frac{\partial P}{\partial x} + \mathbf{i} \frac{\partial Q}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial P}{\partial y} + \mathbf{j} \frac{\partial Q}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial P}{\partial z} + \mathbf{k} \frac{\partial Q}{\partial z} \\ &= \mathbf{i} \frac{\partial P}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial P}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial P}{\partial z} + \mathbf{i} \frac{\partial Q}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial Q}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial Q}{\partial z} \\ &= \left(\mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) P + \left(\mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) Q = \nabla P + \nabla Q \\ \text{b. } \nabla(PQ) &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \right) (PQ) = \frac{\partial}{\partial x} (PQ) \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} (PQ) \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} (PQ) \mathbf{k} \\ &= \left(P \frac{\partial Q}{\partial x} + Q \frac{\partial P}{\partial x} \right) \mathbf{i} + \left(P \frac{\partial Q}{\partial y} + Q \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathbf{j} + \left(P \frac{\partial Q}{\partial z} + Q \frac{\partial P}{\partial z} \right) \mathbf{k} \\ &= P \left(\frac{\partial Q}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial Q}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial Q}{\partial z} \mathbf{k} \right) + Q \left(\frac{\partial P}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial P}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial P}{\partial z} \mathbf{k} \right) = P\nabla Q + Q\nabla P \end{aligned}$$

Ejemplo 3.43. Demuestre que $\nabla \cdot \nabla \phi = \nabla^2 \phi$, donde $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ denota el operador Laplaciano.

Solución

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \nabla \phi &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \right) \cdot \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \mathbf{k} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \\ &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \phi = \nabla^2 \phi \end{aligned}$$

Ejemplo 3.44. Para los campos vectoriales \mathbf{A} y \mathbf{B} , se pide demostrar que:

a. $\nabla \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \nabla \cdot \mathbf{A} + \nabla \cdot \mathbf{B}$

b. $\nabla \cdot (\phi \mathbf{A}) = (\nabla \phi) \cdot \mathbf{A} + \phi(\nabla \cdot \mathbf{A})$

Solución

a. Sean $\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}$ y $\mathbf{B} = B_1\mathbf{i} + B_2\mathbf{j} + B_3\mathbf{k}$, entonces se tiene,

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B}) &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \right) \cdot [(A_1 + B_1)\mathbf{i} + (A_2 + B_2)\mathbf{j} + (A_3 + B_3)\mathbf{k}] \\ &= \frac{\partial}{\partial x} (A_1 + B_1) + \frac{\partial}{\partial y} (A_2 + B_2) + \frac{\partial}{\partial z} (A_3 + B_3) \\ &= \frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z} + \frac{\partial B_1}{\partial x} + \frac{\partial B_2}{\partial y} + \frac{\partial B_3}{\partial z} \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \right) \cdot (A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}) + \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \right) \cdot (B_1\mathbf{i} + B_2\mathbf{j} + B_3\mathbf{k}) \\ &= \nabla \cdot \mathbf{A} + \nabla \cdot \mathbf{B} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b. } \nabla \cdot (\phi \mathbf{A}) &= \nabla \cdot (\phi A_1 \mathbf{i} + \phi A_2 \mathbf{j} + \phi A_3 \mathbf{k}) = \frac{\partial}{\partial x} (\phi A_1) + \frac{\partial}{\partial y} (\phi A_2) + \frac{\partial}{\partial z} (\phi A_3) \\ &= \frac{\partial \phi}{\partial x} A_1 + \phi \frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} A_2 + \phi \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial z} A_3 + \phi \frac{\partial A_3}{\partial z} \\ &= \frac{\partial \phi}{\partial x} A_1 + \frac{\partial \phi}{\partial y} A_2 + \frac{\partial \phi}{\partial z} A_3 + \phi \left(\frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z} \right) \\ &= \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \mathbf{k} \right) \cdot (A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}) + \phi \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \right) \cdot (A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}) \\ &= (\nabla \phi) \cdot \mathbf{A} + \phi (\nabla \cdot \mathbf{A}) \end{aligned}$$

Ejemplo 3.45. Sean $\mathbf{A} = A_1 \mathbf{i} + A_2 \mathbf{j} + A_3 \mathbf{k}$, $\mathbf{B} = B_1 \mathbf{i} + B_2 \mathbf{j} + B_3 \mathbf{k}$, se pide demostrar que:

- a. $\nabla \times (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times \mathbf{B}$
- b. $\nabla \times (\phi \mathbf{A}) = (\nabla \phi) \times \mathbf{A} + \phi (\nabla \times \mathbf{A})$

Solución

Para el caso a) se tiene:

$$\begin{aligned} \nabla \times (\mathbf{A} + \mathbf{B}) &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \right) \times [(A_1 + B_1)\mathbf{i} + (A_2 + B_2)\mathbf{j} + (A_3 + B_3)\mathbf{k}] \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_1 + B_1 & A_2 + B_2 & A_3 + B_3 \end{vmatrix} \\ &= \left[\frac{\partial}{\partial y} (A_3 + B_3) - \frac{\partial}{\partial z} (A_2 + B_2) \right] \mathbf{i} + \left[\frac{\partial}{\partial z} (A_1 + B_1) - \frac{\partial}{\partial x} (A_3 + B_3) \right] \mathbf{j} + \\ &+ \left[\frac{\partial}{\partial x} (A_2 + B_2) - \frac{\partial}{\partial y} (A_1 + B_1) \right] \mathbf{k} \\ &= \left[\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z} \right] \mathbf{i} + \left[\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x} \right] \mathbf{j} + \left[\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} \right] \mathbf{k} + \end{aligned}$$

$$+ \left[\frac{\partial B_3}{\partial y} - \frac{\partial B_2}{\partial z} \right] \mathbf{i} + \left[\frac{\partial B_1}{\partial z} - \frac{\partial B_3}{\partial x} \right] \mathbf{j} + \left[\frac{\partial B_2}{\partial x} - \frac{\partial B_1}{\partial y} \right] \mathbf{k} = \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times \mathbf{B}$$

Para el caso b) se tiene:

$$\nabla \times (\phi \mathbf{A}) = \nabla \times (\phi A_1 \mathbf{i} + \phi A_2 \mathbf{j} + \phi A_3 \mathbf{k})$$

$$\begin{aligned} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \phi A_1 & \phi A_2 & \phi A_3 \end{vmatrix} \\ &= \left[\frac{\partial}{\partial y} (\phi A_3) - \frac{\partial}{\partial z} (\phi A_2) \right] \mathbf{i} + \left[\frac{\partial}{\partial z} (\phi A_1) - \frac{\partial}{\partial x} (\phi A_3) \right] \mathbf{j} + \left[\frac{\partial}{\partial x} (\phi A_2) - \frac{\partial}{\partial y} (\phi A_1) \right] \mathbf{k} \\ &= \left[\phi \frac{\partial A_3}{\partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial y} A_3 - \phi \frac{\partial A_2}{\partial z} - \frac{\partial \phi}{\partial z} A_2 \right] \mathbf{i} + \left[\phi \frac{\partial A_1}{\partial z} + \frac{\partial \phi}{\partial z} A_1 - \phi \frac{\partial A_3}{\partial x} - \frac{\partial \phi}{\partial x} A_3 \right] \mathbf{j} + \\ &+ \left[\phi \frac{\partial A_2}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial x} A_2 - \phi \frac{\partial A_1}{\partial y} - \frac{\partial \phi}{\partial y} A_1 \right] \mathbf{k} \\ &= \phi \left[\left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} \right) \mathbf{k} \right] \\ &+ \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial y} A_3 - \frac{\partial \phi}{\partial z} A_2 \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} A_1 - \frac{\partial \phi}{\partial x} A_3 \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} A_2 - \frac{\partial \phi}{\partial y} A_1 \right) \mathbf{k} \right] \\ &= \phi (\nabla \times \mathbf{A}) + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial \phi}{\partial x} & \frac{\partial \phi}{\partial y} & \frac{\partial \phi}{\partial z} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix} = \phi (\nabla \times \mathbf{A}) + (\nabla \phi) \times \mathbf{A} \end{aligned}$$

Ejemplo 3.46. Suponga que $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{0}$, se pide determinar $\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{r})$.

Solución

Sea $\mathbf{A} = A_1 \mathbf{i} + A_2 \mathbf{j} + A_3 \mathbf{k}$, $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, entonces,

$$\mathbf{A} \times \mathbf{r} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ x & y & z \end{vmatrix} = (zA_2 - yA_3)\mathbf{i} + (xA_3 - zA_1)\mathbf{j} + (yA_1 - xA_2)\mathbf{k}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{r}) &= \frac{\partial}{\partial x} (zA_2 - yA_3) + \frac{\partial}{\partial y} (xA_3 - zA_1) + \frac{\partial}{\partial z} (yA_1 - xA_2) \\ &= z \frac{\partial A_2}{\partial x} - y \frac{\partial A_3}{\partial x} + x \frac{\partial A_3}{\partial y} - z \frac{\partial A_1}{\partial y} + y \frac{\partial A_1}{\partial z} - x \frac{\partial A_2}{\partial z} \\ &= x \left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z} \right) + y \left(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x} \right) + z \left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} \right) \\ &= [x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}] \cdot \left[\left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} \right) \mathbf{k} \right] \\ &= \mathbf{r} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = \mathbf{r} \cdot \text{rot } \mathbf{A}, \text{ además, si } \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{0}, \text{ entonces, } \mathbf{r} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0 \end{aligned}$$

Ejemplo 3.47. Dado un campo escalar ϕ , se pide demostrar que

a) $\nabla \times (\nabla\phi) = \mathbf{0}$ (rot grad $\phi = \mathbf{0}$)

b) $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = \mathbf{0}$ (div rot $\mathbf{A} = 0$)

Solución

$$\begin{aligned} \text{a. } \nabla \times (\nabla\phi) &= \nabla \times \left(\frac{\partial\phi}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z} \mathbf{k} \right) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial\phi}{\partial x} & \frac{\partial\phi}{\partial y} & \frac{\partial\phi}{\partial z} \end{vmatrix} \\ &= \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial\phi}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial\phi}{\partial y} \right) \right] \mathbf{i} + \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial\phi}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial\phi}{\partial z} \right) \right] \mathbf{j} + \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial\phi}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial\phi}{\partial x} \right) \right] \mathbf{k} \\ &= \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial y\partial z} - \frac{\partial^2\phi}{\partial z\partial y} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial z\partial x} - \frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial z} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2\phi}{\partial y\partial x} \right) \mathbf{k} = \mathbf{0} \end{aligned}$$

Lo cual es cierto si y solo si ϕ tenga segundas derivadas parciales continuas de modo que el orden de diferenciación carezca de importancia.

$$\begin{aligned} \text{c. } \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) &= \nabla \cdot \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix} \\ &= \nabla \cdot \left[\left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} \right) \mathbf{k} \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} \right) \\ &= \frac{\partial^2 A_3}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 A_2}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 A_1}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 A_3}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 A_2}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 A_1}{\partial z \partial y} = 0 \end{aligned}$$

con la suposición de que \mathbf{A} tiene segundas derivadas parciales continuas. Se observa la similitud de los resultados anteriores y el resultado: $(\mathbf{C} \times \mathbf{C}\lambda) = (\mathbf{C} \times \mathbf{C})\lambda = \mathbf{0}$, donde λ es un escalar, por lo cual, $\mathbf{C} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = (\mathbf{C} \times \mathbf{C}) \cdot \mathbf{A} = \mathbf{0}$.

Ejemplo 3.48. Encuentre rot $(\mathbf{r}f(r))$, donde $f(r)$ es diferenciable.

Solución

$$\begin{aligned} \text{rot } (\mathbf{r}f(r)) &= \nabla \times (\mathbf{r}f(r)) \\ &= \nabla \times (xf(r)\mathbf{i} + yf(r)\mathbf{j} + zf(r)\mathbf{k}) \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xf(r) & yf(r) & zf(r) \end{vmatrix} \\ &= \left(z \frac{\partial f}{\partial y} - y \frac{\partial f}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(x \frac{\partial f}{\partial z} - z \frac{\partial f}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(y \frac{\partial f}{\partial x} - x \frac{\partial f}{\partial y} \right) \mathbf{k} \end{aligned}$$

$$\text{Además, } \frac{\partial f}{\partial x} = \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right) \left(\frac{\partial r}{\partial x}\right) = \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial}{\partial x} (\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) = \frac{f'(r)x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{f'_x}{r}$$

$$\text{De manera similar, se tiene, } \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{f'_y}{r} \text{ y } \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{f'_z}{r}$$

Luego, esto no lleva al siguiente resultado,

$$\left(z \frac{f'_y}{r} - y \frac{f'_z}{r}\right) \mathbf{i} + \left(x \frac{f'_z}{r} - z \frac{f'_x}{r}\right) \mathbf{j} + \left(y \frac{f'_x}{r} - x \frac{f'_y}{r}\right) \mathbf{k} = \mathbf{0}$$

Ejemplo 3.49. Se pide demostrar que $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = -\nabla^2 \mathbf{A} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A})$.

Solución

$$\begin{aligned} \text{Por definición, se tiene, } \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) &= \nabla \times \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix} \\ &= \nabla \times \left[\left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z}\right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x}\right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y}\right) \mathbf{k} \right] \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z} & \frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x} & \frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} \end{vmatrix} \\ &= \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x}\right) \right] \mathbf{i} + \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y}\right) \right] \mathbf{j} + \\ &+ \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z}\right) \right] \mathbf{k} \\ &= \left(-\frac{\partial^2 A_1}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 A_1}{\partial z^2}\right) \mathbf{i} + \left(-\frac{\partial^2 A_2}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 A_2}{\partial x^2}\right) \mathbf{j} + \left(-\frac{\partial^2 A_3}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 A_3}{\partial y^2}\right) \mathbf{k} + \\ &+ \left(\frac{\partial^2 A_2}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 A_3}{\partial z \partial x}\right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial^2 A_3}{\partial z \partial y} + \frac{\partial^2 A_1}{\partial x \partial y}\right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial^2 A_1}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 A_2}{\partial y \partial z}\right) \mathbf{k} \\ &= \left(-\frac{\partial^2 A_1}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 A_1}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 A_1}{\partial z^2}\right) \mathbf{i} + \left(-\frac{\partial^2 A_2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 A_2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 A_2}{\partial z^2}\right) \mathbf{j} + \left(-\frac{\partial^2 A_3}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 A_3}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 A_3}{\partial z^2}\right) \mathbf{k} \\ &+ \left(\frac{\partial^2 A_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_2}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 A_3}{\partial z \partial x}\right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial^2 A_1}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 A_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_3}{\partial z \partial y}\right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial^2 A_1}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 A_2}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 A_3}{\partial z^2}\right) \mathbf{k} \\ &= -\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) (A_1 \mathbf{i} + A_2 \mathbf{j} + A_3 \mathbf{k}) + \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z}\right) + \\ &+ \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z}\right) + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z}\right) \\ &= -\nabla^2 \mathbf{A} + \nabla \left(\frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z}\right) = -\nabla^2 \mathbf{A} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) \end{aligned}$$

Ejemplo 3.50. Suponga que $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$, se pide demostrar que $\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot } \mathbf{v}$, donde $\boldsymbol{\omega}$ es un vector constante.

Solución

$$\begin{aligned} \text{Por definición, } \text{rot } \mathbf{v} &= \nabla \times \mathbf{v} = \nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = \nabla \times \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ x & y & z \end{vmatrix} \\ &= \nabla \times [(\omega_2 z - \omega_3 y)\mathbf{i} + (\omega_3 x - \omega_1 z)\mathbf{j} + (\omega_1 y - \omega_2 x)\mathbf{k}] \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \omega_2 z - \omega_3 y & \omega_3 x - \omega_1 z & \omega_1 y - \omega_2 x \end{vmatrix} = 2(\omega_1 \mathbf{i} + \omega_2 \mathbf{j} + \omega_3 \mathbf{k}) = 2\boldsymbol{\omega} \end{aligned}$$

Luego, $\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{v} = \frac{1}{2} \text{rot } \mathbf{v}$

Ejemplo 3.51. Se pide determinar $\nabla \phi$ para el caso en que: a) $\phi = \ln \|\mathbf{r}\|$, b) $\phi = 1/r$

Solución

a. $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, entonces $\|\mathbf{r}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, por tanto,

$$\begin{aligned} \phi &= \ln \|\mathbf{r}\| = \ln \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \ln (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} \\ \nabla \phi &= \frac{1}{2} \nabla [\ln (x^2 + y^2 + z^2)] \\ &= \frac{1}{2} \left[\mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} \ln (x^2 + y^2 + z^2) + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} \ln (x^2 + y^2 + z^2) + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \ln (x^2 + y^2 + z^2) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{2x}{x^2 + y^2 + z^2} \mathbf{i} + \frac{2y}{x^2 + y^2 + z^2} \mathbf{j} + \frac{2z}{x^2 + y^2 + z^2} \mathbf{k} \right] \\ &= \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{\mathbf{r}}{r^2} \end{aligned}$$

b. $\nabla \phi = \nabla \left(\frac{1}{r} \right) = \nabla \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right) = \nabla [(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}]$

$$\begin{aligned} &= \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} \\ &= \left[-\frac{1}{2} (x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} 2x \right] \mathbf{i} + \left[-\frac{1}{2} (x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} 2y \right] \mathbf{j} + \\ &+ \left[-\frac{1}{2} (x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} 2z \right] \mathbf{k} \\ &= \frac{-x\mathbf{i} - y\mathbf{j} - z\mathbf{k}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} = -\frac{\mathbf{r}}{r^3} \end{aligned}$$

Ejemplo 3.52. Se pide demostrar que $\nabla r^n = nr^{n-2}\mathbf{r}$.

Solución

De lo expuesto en el ejercicio, se tiene que,

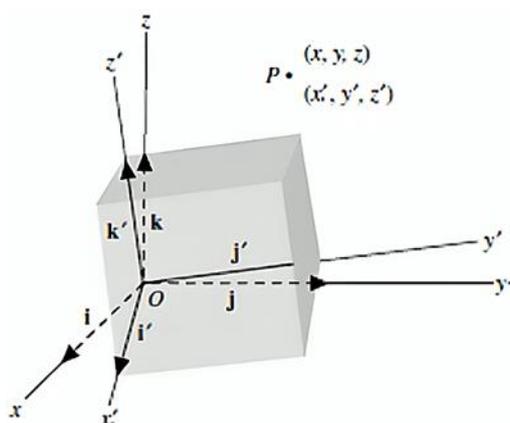
$$\begin{aligned} \nabla r^n &= \nabla \left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \right)^n = \nabla (x^2 + y^2 + z^2)^{n/2} \\ &= \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} [(x^2 + y^2 + z^2)^{n/2}] + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} [(x^2 + y^2 + z^2)^{n/2}] + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} [(x^2 + y^2 + z^2)^{n/2}] \\ &= \left[\frac{n}{2} (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{n}{2}-1} 2x \right] \mathbf{i} + \left[\frac{n}{2} (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{n}{2}-1} 2y \right] \mathbf{j} + \left[\frac{n}{2} (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{n}{2}-1} 2z \right] \mathbf{k} \\ &= n(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{n}{2}-1} (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) = n(r^2)^{\frac{n}{2}-1} \mathbf{r} = nr^{n-2} \mathbf{r} \end{aligned}$$

- **Invariancia**

Si se toman dos sistemas de coordenadas rectangulares o marcos de referencia xyz y $x' y' z'$ respectivamente y además, que tengan el mismo origen O pero con ejes rotados con respecto al otro (ver Figura 63).

Figura 63

Transformación entre coordenadas



Nota: Autor (2024)

Además, el punto P en el espacio tiene coordenadas (x, y, z) o (x', y', z') relativas a los sistemas coordenados en referencia, las ecuaciones de transformación entre coordenadas de los dos sistemas corresponden a las siguientes:

$$\begin{aligned} x' &= l_{11}x + l_{12}y + l_{13}z \\ y' &= l_{21}x + l_{22}y + l_{23}z \\ z' &= l_{31}x + l_{32}y + l_{33}z \end{aligned} \quad (5.1)$$

Donde, para $j, k = 1, 2, 3$, l_{jk} representan los cosenos directores de los ejes x', y' y z' con respecto de los ejes x, y y z . En el caso en que los orígenes de los dos sistemas coordenados no coincidan, las ecuaciones de transformación se convierten en las siguientes:

$$\begin{aligned} x' &= l_{11}x + l_{12}y + l_{13}z + a'_1 \\ y' &= l_{21}x + l_{22}y + l_{23}z + a'_2 \\ z' &= l_{31}x + l_{32}y + l_{33}z + a'_3 \end{aligned} \quad (5.2)$$

donde el origen 0 del sistema de coordenadas xyz se localiza en (a'_1, a'_2, a'_3) en relación con el sistema coordenado $x'y'z'$. Las ecuaciones de transformación (1) definen una rotación pura, mientras que las ecuaciones (2) definen una rotación con traslación. Cualquier movimiento de cuerpo rígido tiene el efecto de una traslación seguida de una se llama transformación afín.

Físicamente, una función escalar puntual o campo escalar $\phi(x, y, z)$ evaluada en un punto particular, debe ser independiente de las coordenadas del punto. Así, la temperatura en cierto punto no depende de si se utilizan coordenadas (x, y, z) o (x', y', z') . Entonces, si $\phi(x, y, z)$ es la temperatura en el punto P con coordenadas (x, y, z) y $\phi'(x', y', z')$ es la temperatura en el mismo punto P con coordenadas (x', y', z') , debe ocurrir que $\phi(x, y, z) = \phi'(x', y', z')$. Si $\phi(x, y, z) = \phi'(x', y', z')$, donde x, y, z, x', y', z' están relacionadas por las ecuaciones de transformación (1) o (2), transformación de rotación (1), ya que $x^2 + y^2 + z^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$.

En forma similar, una función vectorial puntual o campo vectorial $\mathbf{A}(x, y, z)$ se llama invariante si $\mathbf{A}(x, y, z) = \mathbf{A}'(x', y', z')$. Esto se cumple si

$$A_1(x, y, z)\mathbf{i} + A_2(x, y, z)\mathbf{j} + A_3(x, y, z)\mathbf{k} = A'_1(x', y', z')\mathbf{i}' + A'_2(x', y', z')\mathbf{j}' + A'_3(x', y', z')\mathbf{k}'$$

Es posible demostrar que el gradiente de un campo escalar invariante es un campo vectorial invariante con respecto de las transformaciones (5.1) o (5.2). De manera similar, la divergencia y el rotacional de un campo vectorial invariante son invariantes con dichas transformaciones.

Ejemplo 3.53. Dados dos sistemas de coordenadas rectangulares xyz y $x'y'z'$ que tienen el mismo origen, se giran uno con respecto del otro, se desea obtener las ecuaciones de transformación entre las coordenadas de un punto en los dos sistemas.

Solución

Sean r y r' los vectores de posición de cualquier punto P en los dos sistemas, entonces, como $r = r'$, se tiene, $x'i + y'j + z'k' = xi + yj + zk$ (1), ahora, para cualquier vector A , tenemos lo siguiente $A = (Ai')i' + (Aj')j' + (Ak')k'$, además, si se toma $A = i, j$ y k en sucesión, se obtiene,

$$\begin{cases} i = (i \cdot i')i' + (i \cdot j')j' + (i \cdot k')k' = l_{11}i' + l_{21}j' + l_{31}k' \\ j = (j \cdot i')i' + (j \cdot j')j' + (j \cdot k')k' = l_{12}i' + l_{22}j' + l_{32}k' \\ k = (k \cdot i')i' + (k \cdot j')j' + (k \cdot k')k' = l_{13}i' + l_{23}j' + l_{33}k' \end{cases} \quad (2)$$

Al sustituir las ecuaciones (2) en (1) e igualar los coeficientes de i', j' y k' , se encuentra que: $x' = l_{11}x + l_{12}y + l_{13}z$, $y' = l_{21}x + l_{22}y + l_{23}z$ y $z' = l_{31}x + l_{32}y + l_{33}z$ que son las ecuaciones de transformación pedidas.

Ejemplo 3.54. Suponga que $\phi(x, y, z)$ es un invariante escalar con respecto a una rotación de ejes. Se pide demostrar que $\text{grad } \phi$ es un invariante vectorial en la transformación.

Solución

Por hipótesis, $\phi(x, y, z) = \phi'(x', y', z')$, además, para establecer el resultado deseado, debe demostrarse que

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} i + \frac{\partial \phi}{\partial y} j + \frac{\partial \phi}{\partial z} k = \frac{\partial \phi'}{\partial x'} i' + \frac{\partial \phi'}{\partial y'} j' + \frac{\partial \phi'}{\partial z'} k'$$

Con el empleo de la regla de la cadena y las ecuaciones de transformación citadas anteriormente, se tiene,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial x} &= \frac{\partial \phi'}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial \phi'}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial x} + \frac{\partial \phi'}{\partial z'} \frac{\partial z'}{\partial x} = \frac{\partial \phi'}{\partial x'} l_{11} + \frac{\partial \phi'}{\partial y'} l_{21} + \frac{\partial \phi'}{\partial z'} l_{31} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} &= \frac{\partial \phi'}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial y} + \frac{\partial \phi'}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial y} + \frac{\partial \phi'}{\partial z'} \frac{\partial z'}{\partial y} = \frac{\partial \phi'}{\partial x'} l_{12} + \frac{\partial \phi'}{\partial y'} l_{22} + \frac{\partial \phi'}{\partial z'} l_{32} \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} &= \frac{\partial \phi'}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial z} + \frac{\partial \phi'}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial z} + \frac{\partial \phi'}{\partial z'} \frac{\partial z'}{\partial z} = \frac{\partial \phi'}{\partial x'} l_{13} + \frac{\partial \phi'}{\partial y'} l_{23} + \frac{\partial \phi'}{\partial z'} l_{33} \end{aligned}$$

Al multiplicar estas ecuaciones por \mathbf{i} , \mathbf{j} y \mathbf{k} , respectivamente, y sumarlas se obtiene:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \phi}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \mathbf{k} \\ &= \left(\frac{\partial \phi'}{\partial x'} l_{11} + \frac{\partial \phi'}{\partial y'} l_{21} + \frac{\partial \phi'}{\partial z'} l_{31} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial \phi'}{\partial x'} l_{11} + \frac{\partial \phi'}{\partial y'} l_{21} + \frac{\partial \phi'}{\partial z'} l_{31} \right) \mathbf{j} + \\ &+ \left(\frac{\partial \phi'}{\partial x'} l_{11} + \frac{\partial \phi'}{\partial y'} l_{21} + \frac{\partial \phi'}{\partial z'} l_{31} \right) \mathbf{k} = \frac{\partial \phi'}{\partial x'} \mathbf{i}' + \frac{\partial \phi'}{\partial y'} \mathbf{j}' + \frac{\partial \phi'}{\partial z'} \mathbf{k}' \end{aligned}$$

3.7. Problemas propuestos

- **Hallar el dominio y rango de cada una de las siguientes funciones:**

1. $f(x, y) = xy\sqrt{x^2 + y}$ Sol. $D_f = \{z = f(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \sqrt{x^2 + y} \geq 0\}$, $Rg = \{z \in \mathbb{R}\}$
2. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 4}$ Sol. $D_f = \{z = f(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 > 4\}$, $Rg = \{z \in \mathbb{R} / z \geq 0\}$
3. $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 4}}$ Sol. $D_f = \{z = f(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 - 4 \neq 0, x^2 + y^2 > 4\}$, $Rg = \{z \in \mathbb{R} / z > 0\}$
4. $f(x, y) = \frac{1}{\text{sen}(x+y)}$ Sol. $D_f = \{z = f(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \text{sen}(x+y) \neq 0\}$, $Rg = \{z \in \mathbb{R} / z \leq -1 \vee z \geq 1\}$
5. $f(x, y) = \sqrt{\cos(x^2 + y^2)}$ Sol. $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \cos(x^2 + y^2) \geq 0\}$, $Rg = \{z \in \mathbb{R} / 0 \leq z \leq 1\}$

- **Comprobar la existencia de los siguientes límites:**

1. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(x+y)^2}{x^2+y^2}$ Sol. No existe
2. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4}$ Sol. No existe
3. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2x^2y}{x^2+y^2}$ Sol. No existe
4. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{8x^2y^2}{x^2+y^4}$ Sol. 0
5. $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{x^2-2xy+y^2}{x-y}$ Sol. 0

6. $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{x-y+2\sqrt{x}-2\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$ Sol. 2

7. $\lim_{(x,y) \rightarrow (4,5)} \frac{x+y-9}{\sqrt{x+y}-3}$ Sol. 6

8. $\lim_{(x,y) \rightarrow (4,3)} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{y+1}}{x-y-1}$ Sol. $\frac{1}{4}$

9. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,3)} \frac{\tan(xy)}{x}$ Sol. 3

10. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,3)} \frac{1-\cos(xy)}{(xy)^2}$ Sol. $\frac{1}{2}$

• **Estudiar la continuidad de las siguientes funciones**

1. $f(x, y) = \frac{\text{sen}(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$ Sol. Continua en \mathbb{R}^2 , en $(0,0)$ tiene discontinuidad evitable

2. $f(x, y) = \cos \sqrt[3]{|xy|} - 1$ Sol. Continua en \mathbb{R}^2

3. $f(x, y) = \frac{(x^2+y^2)\ln(1+xy)}{\text{sen}(xy(x^2+y^2))}$ Sol. Tiene discontinuidades evitables en $x^2 + y^2 = 1$

• **Hallar las derivadas parciales de segundo orden de:**

1. $f(x, y) = x^3y + x^2y^2$ Sol. $f_{xx} = 6xy + 6x^2, f_{yy} = 2x, f_{xy} = f_{yx} = 3x^2 + 4xy$

2. $f(x, y) = 3x^3y^2 - 4xy + 5y^3$ Sol. $f_{xx} = 6xy^2 - 4, f_{yy} = 2x^3 + 30xy, f_{xy} = f_{yx} = 6x^2y - 4x + 15y^2$

3. $f(x, y) = x\sqrt{x+y}$ Sol. $f_{xx} = \frac{3}{2\sqrt{x+y}} - \frac{3x+2y}{4(x+y)^{3/2}}, f_{yy} = -\frac{y}{4(x+y)^{3/2}}$

4. $f(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2}$ Sol. $f_{xx} = \frac{2x(x^2-3y^2)}{(x^2+y^2)^3}, f_{yy} = \frac{2x(3y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^3}$

5. Sea $f(x, y) = 3x^3y - 2x^2y^2 + y^3$

a. Determinar $f_x(1, -2), f_y(1, -2)$. Sol. $f_x = -34, f_y = 23,$

b. Determinar las segundas derivadas. Sol. $f_{xx} = 18xy - 4y^2, f_{yy} = -4x^2 + 6y$

6. Sea $f(x, y) = xe^{y^2} + y \ln x$

a. Determinar $f_x(1,1), f_y(1,1)$. Sol. $f_x = e + 1, f_y = 2,$

b. Verificar que $f_{xy} = f_{yx}$. Sol. $f_{xy} = f_{yx} = 2ye^{y^2} + 1/x$

7. Sea $f(x, y) = \ln(x^2 + y)$

a. Determinar $f_x(1,2), f_y(1,2)$. Sol. $f_x = 2/3, f_y = 1/3,$

b. Determinar las segundas derivadas. Sol. $f_{xx} = \frac{2(y-x^2)}{(x^2+y)^2}$, $f_{yy} = -\frac{1}{(x^2+y)^2}$,

$$f_{xy} = -\frac{2x}{(x^2+y)^2}$$

8. Sea $f(x, y) = e^x \operatorname{sen}(y)$ probar que $f_{xx} + f_{yy} = 0$

Sea $f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x+y}$, demostrar que $xf_x + yf_y = 3f$

9. Determinar $a \in \mathbb{R}$ de modo que la función $f(x, y) = \cos(2cx + act)$, con $c \neq 0$ satisfaga la ecuación, $f_{tt} = c^2 f_{xx}$

• **Empleando la regla de la cadena, se pide resolver.**

1. $x(u, v) = vu^3 - v$, $y(u, v) = u - 4v$, $z = e^{x-3y}$, hallar z_u, z_v

$$\text{Sol. } z_u = 3e^{x-3y}(vu^2 - 1), z_v = e^{x-3y}(u^3 + 11)$$

2. $w = e^{xyz}$, $x = r + 5t$, $y = 2t^3$, $z = 1 - 3r^2$, hallar w_t, w_r

$$\text{Sol. } w_t = 5yze^{xyz} + 6xzt^2 e^{xyz}, w_r = yze^{xyz} - 6xyre^{xyz}$$

3. $w = xy - yz - x^2 yz$, $x = t - 1$, $y = 2t^3$, $z = t^2 + 1$, hallar w_t

$$\text{Sol. } w_t = (y - 2xyz) + 6t^2(x - z - x^2 z) - 2t(y + x^2 y)$$

4. $w = e^{x+y}$, $x = r + t$, $y = u - 2t$, $z = 1 - 2r^2$, hallar w_u, w_r, w_t

$$\text{Sol. } w_u = e^{x+y}, w_r = e^{x+y}, w_t = e^{x+y}$$

5. $u(x, t) = t \ln x + 7\sqrt{t}$, $x = y^2 + 5$, $t = y^{-1} + e^y$, hallar u_x

$$\text{Sol. } u_x = \frac{2xt}{x^2+5} + \left(\ln(x^2 + 5) + \frac{7\sqrt{y}}{2\sqrt{1+ye^y}} \right) (y^2 e^y - 1)$$

• **Aplicaciones sobre derivadas parciales multivariables**

1. Las ecuaciones paramétricas de las trayectorias de dos objetos corresponden a:

Primer objeto: $x_1 = 10 \cos 2t$, $y_1 = 6 \operatorname{sen} 2t$

Segundo objeto: $x_2 = 7 \cos t$, $y_2 = 4 \operatorname{sen} t$

¿A qué velocidad o ritmo cambia la distancia entre los dos objetos en $t = \pi/2$?

Sol. $-11\sqrt{29}/29$

2. Suponer que la función de costos conjuntos de una empresa que elabora dos tipos de Discos para PC está dada por $C(q_1, q_2) = q_1^2 + q_2^2 + 4q_1 q_2 + 700$. Se tiene planeado reducir la producción de los dos tipos de discos en los próximos meses de acuerdo con las fórmulas $q_1 = 150 - 3t$, y $q_2 =$

- $100 - 2t$ donde t está medido en meses. Expresar la razón de cambio de los costos con respecto al tiempo. Sol. $dC/dt = 80t - 4100$
3. La presión P en kPa, el volumen V en L (litros) y la temperatura T en K de una mol de un gas ideal se encuentran relacionados por la expresión. Encuentre la velocidad a la cual la presión cambia con respecto al tiempo si la temperatura es de 300 K y se incrementa a razón de 0.1 ks^{-1} y el volumen es de 100 litros y se incrementa a razón de 0.2 Ls^{-1} . Identificar las variables del problema. Sol. $P_t = \frac{0.83}{(100+0.2t)} - \frac{1.66(300+0.1t)}{(100+0.2t)^2}$
4. Estimar por medio de diferenciales el valor de
- $\sqrt{1.03}/1.99$. Sol. 0.51
 - $2.5 \ln 1.03$. Sol. 0.074
 - $\ln(0.99) + 0.99\sqrt{3.97}$ Sol. 1.97
 - $\sqrt{(4.07)^2 + (2.97)^2}$. Sol. 5.04
5. El número de cientos de libros que una microempresa puede empastar semanalmente depende de L y K de acuerdo con el modelo matemático siguiente: $P(L, K) = 2K^2 - 0.5KL + 0.5L^2$, donde L es medido en horas-trabajador por semana y K es el monto de capital invertido por semana.
- Determinar la cantidad de libros que puede empastar semanalmente si se dispone de 40 horas en una semana y la inversión de capital es de 6 (u.m.). Sol. 752
 - Usar la diferencial para estimar el incremento en la producción cuando se contrate un obrero más y la inversión se reduce de 6 a 5.5 (u.m.). Sol. $\Delta P = 35$ unidades.
6. La demanda de un tipo de vehículo depende del precio de venta del automóvil y del precio de la gasolina de acuerdo con el siguiente modelo matemático:

$$D(p_a, p_g) = 600 - 40\sqrt{p_a} - 12000(0.1p_g + 0.005)^{\frac{2}{3}}$$

Si actualmente el precio de este vehículo es de \$3600 y el precio de la gasolina es de 0.03 \$/L. Estimar el cambio en la demanda cuando el precio de la gasolina aumente en 0.005 \$/L y el precio del vehículo aumenta en \$5. Respuesta: -40/3 unidades.

La función de producción de una empresa está dada por $P(L, K) = 240L^{2/3}K^{1/3}$, donde L es medido en miles de horas-trabajador por semana y K es el monto de capital invertido por semana.

- a. Determinar la productividad cuando $L = 27$ y $K = 216$. Sol. $P(27,216) = 12\,960$
- b. Hallar la producción cuando L aumenta a 29 y K se reduce a 200. Sol. $P(29,200) = 13280$
7. Resolver por medio de diferenciación implícita las siguientes ecuaciones:
 - a. $z^3 + 2e^{xyz} + 2xy = 3$, hallar z_y . Sol. $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-2z - 2xze^{xyz}}{3z^2 + 2xye^{xyz}}$
 - b. $z^2 - 3xy = x^2 + \sqrt{y^2 - 1}$, hallar z_x . Sol. $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{3y + 2x}{2z}$
 - c. $z^3 + z^2 - 2 = 3xyz - x$, hallar z_y . Sol. $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{3zx}{3z^2 + 2z - 3xy}$
 - d. $\ln(xz) = xy$, hallar z_x . Sol. $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{z(xy-1)}{x}$
 - e. $e^z - 3yz - y^2\sqrt{x^2 - 1} = x$, hallar z_y . Sol. $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{3z + 2y\sqrt{x^2 - 1}}{e^z - 3y}$

• **E. Gradiente y derivadas direccionales**

1. Para la curva plana definida implícitamente por la ecuación $xy = \cos(\pi x^2 + y)$ se pide determinar la recta tangente a la curva en el punto $P(1,0)$. Sol. $y = \pi(1 - x)$
2. Para el campo escalar definido por $f(x, y) = x^2y^3 - 2xy^2$, se pide determinar:
 - a. La ecuación del plano tangente a la gráfica de f en el punto $(1, -1, -3)$. Sol. $4x - 7y + z = 8$
 - b. La ecuación de la recta tangente en el punto $P(1, -1)$ a la curva definida por la función implícita $x^2y^3 - 2xy^2 + 3 = 0$. Sol. $4x - 7y - 11 = 0$.
3. Para el campo escalar definido por la función $f(x, y) = x^2 + y^2 - \ln(x - y)$ se pide:
 - a. Hallar la ecuación del plano tangente a la superficie $z = f(x, y)$ en el punto $P(x, y, z) = (2, 1, 5)$
 - b. Determinar la ecuación de la recta tangente en el punto $P(2, 1)$ a la curva de definida por la ecuación $f(x, y) = 5$.

4. Para el campo escalar dado por $f(x, y) = 2xy + x^3$ se pide determinar el punto de la gráfica $P(x_0, y_0, z_0)$ cuyo plano tangente sea paralelo al plano $z = x + y$. Sol. $P\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}\right)$
5. Una abeja inicia una trayectoria en línea recta en una habitación desde el punto $P(2, 8, 3)$ al punto $Q(4, 6, 2)$. Sabiendo que la temperatura en cada punto (x, y, z) está dada por el campo escalar $T(x, y, z) = xe^{y-z}$, calcular la tasa de cambio de temperatura que experimenta la abeja en el momento que inicia el vuelo. Sol. $-e^5/3$.
6. La temperatura en cada punto $(x; y)$ de una lámina está dada por la función,

$$T(x, y) = 2x + e^{y^2 - x^2}$$

Si un dispositivo móvil provisto de un termómetro va midiendo la temperatura siguiendo la trayectoria $r(t) = (x(t), y(t)) = (\sin(t) - \sin(2t), \sin(t) + \sin(2t))$ se pide:

- a. Calcular la posición y el vector velocidad del móvil en el instante $t = \pi/2$. Sol. $(2, -2)$.
 - b. Calcular la tasa de variación de la temperatura que experimenta el móvil en el instante $t = \pi/2$. Sol. $\partial T(\pi/2)/\partial t = -4$.
 - c. Suponiendo que el móvil puede cambiar su trayectoria, calcular el vector unitario que marca la dirección en que debe moverse a partir de $P = r(\pi/2)$ para que la temperatura medida aumente lo más rápido posible. Sol. $\mathbf{u} = (0, 1)$.
7. Determinar los extremos relativos de las siguientes funciones:
 - a. $f(x, y) = x^3 + y^2 - 2x + 4y + 20$. Sol. $f(1, -2) = 15$ es un mínimo relativo
 - b. $f(x, y) = 2x^4 + y^2 - 3yx^2$. Sol. $f(0, 0) = 0$ es un mínimo
 - c. $f(x, y) = x^3 + y^2 + yx^2 + 2y + 1$. Sol. $F(1, -3/2) = -1/4$ es un mínimo relativo, además hay dos puntos de silla en $P_1(0, -1)$ y $P_2(2, -3)$
 - d. $f(x, y) = x^2y + 2y^2x - 2xy$. Sol. $f(2/3, 1/3) = -4/27$ es un mínimo relativo, además hay puntos de silla en $P_1(0, 0)$ y $P_2(0, 1)$ y $P_3(2, 0)$
 - e. $f(x, y) = 1 - \sqrt[3]{x^2 + y^2}$. Sol. $f(0, 0)$ es un máximo relativo

- f. $f(x, y) = x^3 - 6xy + y^3$. Sol. $f(2,2)$ es un mínimo relativo, $f(0,0)$ es un punto de silla
8. Hallar los extremos de $f(x, y) = xy + 2x$ sujeta a $4x + 2y = 60$. Sol. $f(8,14) = 128$ es un máximo.
9. Determinar los extremos de $f(x, y) = 3xy^2 + x^3$ sujeta a $x^2 + y^2 = 4$. Sol. $f(\sqrt{2}, \sqrt{2}) = 8\sqrt{2}$, $f(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = 8\sqrt{2}$ son máximos absolutos, $f(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = -8\sqrt{2}$, $f(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = -8\sqrt{2}$ son mínimos absolutos.
10. Hallar los extremos de $f(x, y) = x^2 + y^2 + xy$ sujeta a $x^2 + y^2 \leq 1$. Sol. $f(0,0) = 0$ es un mínimo, $f(-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2) = 3/2$ es un máximo.
11. Una fábrica trabaja sobre un pedido de 1000 escritorios de madera que deben ser producidos en dos localidades diferentes. Si x_1 y x_2 representan las unidades producidas en cada localidad, y la función de costos está dada por $C = 0.25x_1^2 + 10x_1 + 0.15x_2^2 + 12x_2$, se pide determinar el número de escritorios que deben producirse en cada localidad a un costo mínimo. Sol. $x_1 = 378$ y $x_2 = 622$
12. La producción semanal de una industria está dada por $Q(x, y) = 1200x + 500y + x^2y - x^3 - y^2$ (unid) donde x es el número de obreros calificados "A", y el número de obreros calificados "B" que se emplean en la industria. En la actualidad colaboran 30 obreros tipo "A" y 60 obreros tipo "B". Se pide determinar el cambio de la producción semanal que implica agregar un obrero de tipo "A". Sol. $Q_x = 2100$ unid.
13. Una industria produce barras de chocolates según la función de producción $Q(x, y) = -x^3 - 3y^2 + 3x^2 + 24y$ (unid) donde x la cantidad de cacao, y la cantidad de leche. Se pide determinar la producción máxima en un determinado momento. Sol. $Q(2,4) = 52$ unid.
14. Encuentre el plano tangente y la recta normal a $x^2 + y^2 + z^2 = 30$, en el punto $P(1, -2, 5)$. Sol. $x - 2y + 5z = 30$, $\mathbf{r}(t) = (1 + 2t, -2 - 4t, 5 + 10t)$.
15. Encuentre el plano tangente y la recta normal a $x^2 + y^2 + z = 9$, en el punto $P(1, 2, 4)$. Sol. $2x + 4y + z = 14$, $\mathbf{r}(t) = (1 + 2t, 3 + 4t, 4 + t)$.
16. Encuentre el plano tangente y la recta normal a $x^2y = 4ze^{x+y} - 35$, en el punto $P(3, -3, 2)$. Sol. $-26x + y - 4z = -89$, $\mathbf{r}(t) = (3 - 26t, -3 + t, 2 - 4t)$.

17. Encuentre el plano tangente y la recta normal a $\ln(x/2y) = z^2(x - 2y) + 3z + 3$, en el punto $P(4, 2, 1)$. Sol. $-3x/4 + 3y/2 - 3z = 3, \mathbf{r}(t) = (4 - 3t/4, 2 + 3t/2, -1 - 3t)$.
18. Hallar la derivada de $f(x, y, z) = x^3 - xy^2 - z$ en el punto $P(1, 1, 0)$ en la dirección de $\mathbf{v} = (2, -3, 6)$. Sol. $\nabla f|_{P(1,1,0)} = (2, -2, -1), D_{\mathbf{u}}f_{P(1,1,0)} = 4/7$
19. Hallar la derivada de $f(x, y, z) = xy + yz^2 + xz^3$ en el punto $P(2, 0, 3)$ en la dirección de $\mathbf{v} = \left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$. Sol. $\nabla f|_{P(2,0,3)} = (4, -4, 12), D_{\mathbf{u}}f_{P(2,0,3)} = 20/\sqrt{3}$
20. Hallar la derivada de $f(x, y, z) = x \operatorname{sen} yz$ en el punto $P(1, 3, 0)$ en la dirección de $\mathbf{v} = (1, 2, -1)$. Sol. $\nabla f|_{P(1,3,0)} = (0, 0, 3), D_{\mathbf{u}}f_{P(1,3,0)} = -\sqrt{6}/2$
21. Hallar la derivada de $f(x, y, z) = \cos xy + e^{yz} + \ln xz$ en el punto $P(1, 0, 1/2)$ en la dirección de $\mathbf{v} = (1, 2, 2)$. Sol. $\nabla f|_{P(1,0,1/2)} = (1, 1/2, 2), D_{\mathbf{u}}f_{P(1,0,1/2)} = 2$

• **Multiplicadores de Lagrange**

1. Hallar los valores mínimos y máximos de $f(x, y) = 81x^2 + y^2$, sujeta a la restricción $4x^2 + y^2 = 9$. Sol. $\text{Mín} = 9$, en $(0, -3), (0, 3)$, $\text{Máx} = 729/4$, en $(-3/2, 0), (3/2, 0)$
2. Hallar los valores mínimos y máximos de $f(x, y) = 8x^2 - 2y$, sujeta a la restricción $x^2 + y^2 = 1$. Sol. $\text{Mín} = -2$, en $(0, 1)$, $\text{Máx} = 65/8$, en $(-3\sqrt{7}/8, -1/8), (3\sqrt{7}/8, -1/8)$
3. Hallar los valores mínimos y máximos de $f(x, y) = y^2 - 10z$, sujeta a la restricción $x^2 + y^2 + z^2 = 36$. Sol. $\text{Mín} = -60$, en $(0, 0, 6)$, $\text{Máx} = 61$, en $(0, -\sqrt{11}, -5), (0, \sqrt{11}, -5)$
4. Hallar los valores mínimos y máximos de $(x, y) = 3x^2 + y$, sujeta a la restricción $4x - 3y = 9$ y $x^2 + z^2 = 9$. Sol. $\text{Mín} = -\frac{85}{27}$, en $\left(-\frac{2}{9}, -\frac{89}{27}, -\frac{5\sqrt{29}}{9}\right)$ $\text{Máx} = 2/3$, en $(3, 1, 0)$
5. Hallar los valores mínimos y máximos de $(x, y) = 3x - y - 3z$, sujeta a la restricción $x + y - z = 0, x^2 + 2z^2 = 1$. Sol. $\text{Mín} = -\frac{2}{\sqrt{6}}$, en $\left(\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{3}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ $\text{Máx} = \frac{2}{\sqrt{6}}$, en $\left(\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{3}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$

• **Divergencia y rotor de campos vectoriales:**

1. Determinar la divergencia y el rotor de los siguientes campos vectoriales.

a. $\mathbf{A} = (x^2y^2, -x^2y)$. Sol. $\nabla \cdot \mathbf{A} = 2xy^2 - x^2$, $\nabla \times \mathbf{A} = (-2xy - 2x^2y)\mathbf{k}$

b. $\mathbf{A} = (x^2, \text{sen } y, zx)$. Sol. $\nabla \cdot \mathbf{A} = 3x + \cos y$, $\nabla \times \mathbf{A} = -z\mathbf{j}$.

c. $\mathbf{A} = (x^2, \text{sen } y, zx)$. Sol. $\nabla \cdot \mathbf{A} = 3x + \cos y$, $\nabla \times \mathbf{A} = -z\mathbf{j}$.

d. $\mathbf{A} = (z \text{ sen } z, z \text{ cos } z, \sqrt{x^2 + y^2})$.

Sol. $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, $\nabla \times \mathbf{A} = \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \cos z + z \text{ sen } z, \text{sen } z + z \text{ cos } z - \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, 0 \right)$

e. $\mathbf{A} = (2yz, -x^2y, \ln xyz)$. Sol. $\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$, $\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{y}\mathbf{i} - \frac{1}{x}\mathbf{j} + \frac{1}{x}\mathbf{k}$

2. Siendo $\mathbf{A} = (2yz, -x^2y, xz^2)$ y $\phi = 2x^2yz^3$, hallar $\nabla\phi, \nabla \cdot \mathbf{A}, \nabla \times \mathbf{A}, \nabla \cdot (\nabla\phi), \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A})$

Sol. $\nabla\phi = (4xyz^3, 2x^2z^3, 6x^2yz^2)$, $\nabla \cdot \mathbf{A} = -x^2 + 2xz$, $\nabla \times \mathbf{A} = (0, 2y - z^3, -2xy - 2z)$, $\nabla \cdot (\nabla\phi) = 4yz^3 + 12x^2yz$, $\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) = (-2x - 2z, 0, 2x)$

3. Dado el campo escalar $\phi(x, y, z) = x^2yz + 3x^2$, calcular su gradiente, la divergencia del gradiente y el rotacional del gradiente. Sol. $\nabla \cdot (\nabla\phi) = 2yz + 6$, $\nabla \times (\nabla\phi) = \mathbf{0}$

4. Calcular $\nabla \cdot \mathbf{r}/r$, dado, $\mathbf{r} = (x, y, z)$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Sol. $\frac{2}{r}$

5. Determinar si el campo vectorial $\mathbf{F} = \mathbf{r}/r^2$, es

a. Irrotacional. Sol. El campo vectorial es irrotacional en todos los puntos (porque $\nabla \times \mathbf{F}$ siempre es cero), excepto en el origen. El campo no está definido en el origen.

b. solenoidal. Sol. Como el valor de $\nabla \cdot \mathbf{F}$ no es cero, el campo no es solenoidal.

6. Dado $\mathbf{r} = (2y, 4z, x^2z^2)$, calcular $\nabla \cdot \mathbf{r}$ y $\nabla \times \mathbf{r}$ en el punto $P(0, 1, 2)$. Sol. $\nabla \cdot \mathbf{r} = 0$, $\nabla \times \mathbf{r} = -4\mathbf{i} - xz^2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$

7. Si \mathbf{a} es un vector constante, demostrar: $\nabla \times (\mathbf{a} \times \mathbf{r}) = 2\mathbf{a}$. Sol. $2a_1\mathbf{i} + 2a_2\mathbf{j} + 2a_3\mathbf{k} = 2\mathbf{a}$

8. Determinar el valor de la constante k para el cual el rotacional del campo vectorial,

$$\mathbf{F} = -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\mathbf{i} + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\mathbf{j}$$

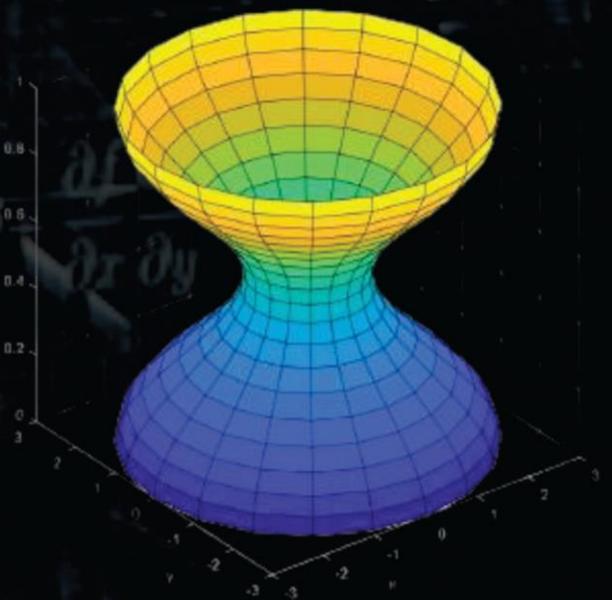
a. es positivo. Sol. El rotacional es positivo si y solo si $k < 2$

- b. negativo. Sol. El rotacional es negativo si y solo si $k > 2$
- c. un vector nulo, Sol. El rotacional es negativo si y solo si $k = 2$
9. Si $\mathbf{A} = (2zy, -x^2y, xz^2)$ y $f = xyz$, demostrar que $(\mathbf{A} \cdot \nabla)f = \mathbf{A} \cdot (\nabla f)$.
10. Determinar los valores de a , b y c de manera que el campo vectorial de:
 $\mathbf{A} = -(3x - y + az)\mathbf{i}$
 $+ (bx + 2y + z)\mathbf{j} + (x + cy - 2z)\mathbf{k}$, sea irrotacional. Sol. $a = 1, b = -1, c = 1$.
11. Demostrar que $\nabla \cdot (\nabla f \times \nabla g) = 0$.
12. Demostrar que $\nabla \cdot \nabla \phi = \Delta \phi$, y demostrar que $\phi(r) = 1/r$ es una solución de la ecuación de Laplace $\Delta \phi = 0$

CAPITULO 04

Capítulo IV: Integral múltiple de funciones

INTEGRAL MÚLTIPLE DE FUNCIONES MULTIVARIABLES



Integral múltiple de funciones multivariables

El estudio del cálculo de integrales múltiples en funciones de varias variables contribuye a una amplia gama de campos de las ciencias y la ingeniería, pudiéndose citar a manera ejemplos: en la Física el cálculo de integrales múltiples se utiliza para calcular las fuerzas y momentos que actúan sobre un cuerpo, el campo gravitacional, el campo eléctrico los fenómenos sobre el flujo de fluidos, la propagación de ondas y la difusión de calor; en la Química, se emplea en el cálculo del potencial químico, la energía libre y la entalpía, así como el modelamiento de fenómenos químicos como la reacción química y la absorción de energía; en Biología, se utiliza para calcular fenómenos como el flujo sanguíneo, la difusión de oxígeno y la distribución de nutrientes, o en su efecto para modelar fenómenos biológicos como el crecimiento celular y la propagación de enfermedades, entre otros campos.

En conclusión, el estudio del cálculo de integrales múltiples proporciona a los científicos e ingenieros las herramientas necesarias para resolver problemas complejos en una amplia gama de campos de las ciencias y la ingeniería que van desde el modelamiento de fenómenos físicos y químicos, la simulación de sistemas complejos, el análisis de datos experimentales, entre otras aplicaciones.

Prerrequisitos para abordar este tema

Para abordar el estudio de las integrales múltiples en el cálculo multivariado, es importante tener una comprensión sólida de los siguientes temas:

- Estar familiarizado con el cálculo diferencial e integral de funciones de una a varias variables aplicadas en límites, derivadas, integrales definidas e indefinidas, etc.
- Tener conocimiento básico de ciertos fenómenos de Física, Química, Biología, etc., con el fin de poder aplicar e interpretar los resultados de problemas con integrales múltiples.

- Comprender los cambios entre los sistemas de coordenadas cartesianas, polares y coordenadas cilíndricas y esféricas, ya que se utilizan para describir posiciones en el espacio.
- Manejo de herramientas de software matemático (Wolfram Mathematica, MATLAB, Python, etc.) para realizar cálculos y visualizaciones de ciertos modelos matemáticos.

4.1. Introducción

El concepto de operación de la integral de una función con una variable visto en un curso regular de cálculo se puede ampliar al caso de estudio de integrales de funciones en varias variables mediante la integración iterativa que permita integrar la función como si fuese de una variable mientras se mantienen constantes las otras.

En este apartado se explica el concepto de integral múltiple como una generalización de la integral definida de una variable a funciones de dos o más variables respectivamente, también se consideran aplicaciones más generales con integración para calcular el volumen, la masa y el centroide de una región, además, se analiza el uso de otros sistemas de coordenadas (como coordenadas polares, cilíndricas y esféricas) para simplificar el cálculo de integrales múltiples sobre ciertos tipos de regiones y funciones.

4.2. Integrales múltiples sobre regiones rectangulares

4.2.1. Integrales dobles

Si $f(x, y)$ es una función continua sobre $[a, b] \times [c, d]$, entonces para cada x fijo en $[a, b]$, la función $f(x, y)$ resulta continua y acotada en $[c, d]$, es decir,

$$\mathbb{R}^2 = [a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$$

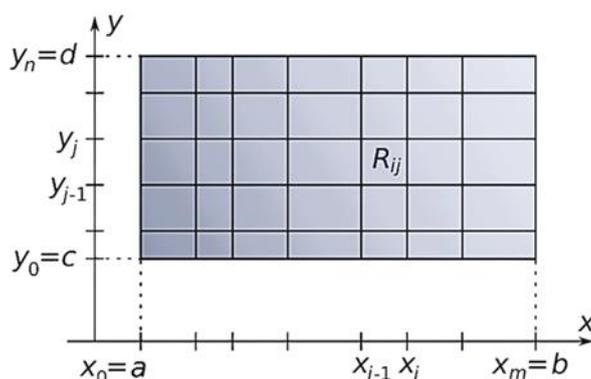
Por tanto, si subdividimos R en rectángulos más pequeños subdividiendo simultáneamente los intervalos $[a, b]$ y $[c, d]$:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 \dots x_{i-1} < x_{m-1} < x_m = b,$$

$$c = y_0 < y_1 < y_2 \dots y_{j-1} < y_{n-1} < y_n = d$$

Figura 64

Región que define una integral doble



Nota: Autor (2024)

Si se establece que R_{ij} denote el subrectángulo en la posición (i, j) , se observa que:

Hay mn subrectángulos totales R_{ij} .

El área de R_{ij} es $\Delta A_{ij} = \Delta x_i \Delta y_j = (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$

Eligiendo un punto muestral (x^*, y^*) en cada R_{ij} , construimos la suma de Riemann

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x^*, y^*) \Delta A_{ij} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x^*, y^*) \Delta x_i \Delta y_j$$

Sea la función $f(x, y)$ definida en una región cerrada y acotada R_{ij} , en el plano xy , entonces se da la Integral doble de $f(x, y)$ sobre R .

$$\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) \Delta A_k = \iint_R f(x, y)$$
 siempre que exista el límite

Si el límite existe, entonces es integrables sobre R_{ij} , téngase en cuenta que la definición anterior considera el rectángulo de la región R_{ij} , y, por tanto, se establece que:

1. La región R_{ij} puede ser otras regiones no rectangulares.
2. La partición bidimensional ΔA_{ij} puede contener otras áreas pequeñas, como triángulos.
3. El límite se toma a medida que se acerca el área de partición más grande a cero.

• **Propiedades de los integrales dobles**

Considerando que las funciones $f(x,y)$ y $g(x,y)$ son integrables sobre la región rectangular R , así como en las subregiones S y T , y que m y M son escalares, se tienen las siguientes propiedades algebraicas que son útiles en cálculos y aplicaciones.

1. Si c es una constante, entonces $f(x,y)$ es integrable:

$$\iint_R cf(x,y) dA = c \iint_R f(x,y) dA$$

2. La suma y diferencia de $f(x,y)$ y $g(x,y)$ son integrables:

$$\iint_R [f(x,y) \pm g(x,y)] dA = \iint_R f(x,y) dA \pm \iint_R g(x,y) dA$$

3. La función $f(x,y)$ y $g(x,y)$ son integrables para un dominio establecido:

a. $\iint_R f(x,y) dA \geq 0$ si $f(x,y) \geq 0$

b. $\iint_R f(x,y) dA \geq \iint_R g(x,y) dA$, si $f(x,y) \geq g(x,y)$

4. Si $m \leq f(x,y) \leq M$ y $A(R) =$ el área de R , entonces,

$$m \cdot A(R) \leq \iint_R f(x,y) dA \leq M \cdot A(R)$$

5. En el caso donde $f(x,y)$ puede ser expresado como factores de una función $g(x)$ solo de x y una función $h(y)$ solo de y , sobre una región dada por $R = \{(x,y) / a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$, la integral doble puede ser escrita como,

$$\iint_R f(x,y) dA = \left(\int_a^b g(x) dx \right) \left(\int_c^d h(y) dy \right)$$

Ejemplo 4.1 Si $(x,y) = k$ (constante), evaluar $\iint_R f(x,y) dA$

Solución. La gráfica de $z = k$ es un plano horizontal (paralelo al plano xy). Por tanto, la región entre la gráfica y R es un sólido rectangular

De este modo $\iint_R f(x,y) dA = \text{Altura} \times \text{área } R = Ka$

Ejemplo 4.2 Si $f(x,y) = 2 - x$, evaluar $\iint_R f(x,y) dA$ en $R = [0,2] \times [0,3]$

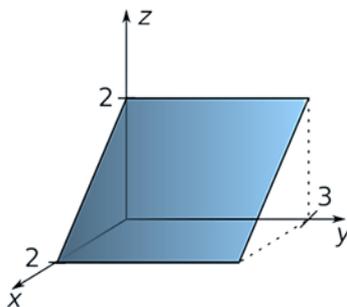
Solución. La gráfica de $z = 2 - x$ es un plano paralelo al eje y .

Por tanto, la región entre la gráfica y R es un prisma triangular

$$\iint_R (2 - x) dA = \left(\frac{1}{2}\right) (2)(2)(3) = 6$$

Figura 65

Integral doble sobre una región



Nota: Autor (2024)

Ejemplo 4.3. Si $f(x,y) = 2 - x^2 - y^2$, evaluar $\iint_R f(x,y) dA$ en $R = [-1,1] \times [-1,1]$

Solución. La gráfica de $z = 2 - x^2 - y^2$ es un paraboloides con apertura hacia abajo.

Para lo cual, primero se trata en determinar el área de una sección transversal de la tienda perpendicular al eje y , o sea,

$$A(y) = \int_{-1}^1 (2 - x^2 - y^2) dx = 2x - \frac{x^3}{3} - xy^2 \Big|_{x=-1}^{x=1}$$

$$A(y) = \left(2 - \frac{1}{3} - y^2\right) - \left(-2 + \frac{1}{3} + y^2\right) = \frac{10}{3} - 2y^2$$

El valor de la integral doble es, por tanto,

$$\int_{-1}^1 A(y) dy = \int_{-1}^1 \left(\frac{10}{3} - 2y^2\right) dy = \frac{10}{3}y - \frac{2}{3}y^3 \Big|_{y=-1}^{y=1} = \frac{16}{3}$$

4.2.2. Integrales iteradas y el Teorema de Fubini

El Teorema de Fubini nos proporciona la condición en que las integrales dobles siempre se pueden expresar como integrales iteradas, por lo que,

Teorema. Si $f(x, y)$ es integrable en la región $[a, b] \times [c, d]$ entonces,

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy$$

Es decir, para funciones continuas sobre un rectángulo del plano el teorema de integración de Fubini bajo el signo integral, verifica que:

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy$$

Observaciones

Las integrales iteradas siempre se evalúan de adentro hacia afuera.

Debe observarse que el teorema de Fubini nos dice que el orden de integración no importa.

Además, todas las funciones continuas son necesariamente integrables, de modo que el teorema de Fubini se aplica automáticamente a sus integrales.

Ejemplo 4.4. Si $R = [0, \pi/2] \times [0, \pi]$, evaluar $\iint_R \cos(x + 2y) dA$

Solución. A partir del teorema de Fubini, se obtiene,

$$\iint_R \cos(x + 2y) dA = \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi} \cos(x + 2y) dy dx$$

$$\int_0^{\pi/2} \left(\frac{\text{sen}(x + 2\pi) - \text{sen}(x)}{2} \Big|_{y=0}^{y=\pi} \right) dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (\text{sen}(x + 2\pi) - \text{sen}(x)) dx = 0$$

Ejemplo 4.5. Si $R = [-1,2] \times [1,3]$, evaluar $\iint_R (x^2y + x + y) dA$

Solución. Aplicando el teorema de Fubini, se obtiene,

$$\begin{aligned} \iint_R (x^2y + x + y) dA &= \int_{-1}^2 \int_1^3 (x^2y + x + y) dy dx \\ \int_0^{\pi/2} \left(\frac{x^2y^2}{2} + xy + \frac{y^2}{2} \Big|_{y=1}^{y=3} \right) dx &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (4x^2 + 2x + 4) dx = \\ &= \left(\frac{32}{3} + 4 + 8 \right) - \left(-\frac{4}{3} + 1 - 4 \right) = 27 \end{aligned}$$

Una función $f(x, y)$ se llama separable si $f(x, y) = g(x)h(y)$, y por tanto, en este caso,

$$\begin{aligned} \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx &= \int_a^b \left(\int_c^d g(x) h(y) dy \right) dx \\ \int_a^b g(x) \left(\int_c^d h(y) dy \right) dx &= \left(\int_c^d h(y) dy \right) \left(\int_a^b g(x) dx \right) \end{aligned}$$

Es decir, la integral doble es simplemente el producto de dos integrales de una sola variable.

Esto puede simplificar algunos cálculos de integrales dobles.

Ejemplo 4.6. Evaluar $\iint_R x^2 e^y dA$, si $R = [-1,1] \times [0,2]$,

Solución. Aplicando el teorema de Fubini, se obtiene,

$$\begin{aligned} \iint_R x^2 e^y dA &= \int_{-1}^1 \int_0^2 x^2 e^y dy dx = \int_{-1}^1 x^2 dx \int_0^2 e^y dy \\ \left(\frac{x^3}{3} \right) \Big|_{x=-1}^{x=1} \left(\frac{e^y}{1} \right) \Big|_{y=0}^{y=2} &= \frac{2}{3} (e^2 - 1) \end{aligned}$$

Aunque el orden de integración en una integral iterada no importa en principio, en la práctica puede ser bastante importante.

Ejemplo 4.7. Evaluar la integral iterada $\int_0^1 \int_0^2 xye^{x^2y} dydx$

Solución. Si procedemos a resolver directamente, por ejemplo, mediante integración por partes en y , encontramos que

$$\int_0^1 \int_0^2 xye^{x^2y} dydx = \int_0^1 \frac{(2x^2 - 1)e^{x^2y} + 1}{x^3} dx$$

Lo que nos condujo a una integral bastante difícil que puede evaluarse usando series de potencias, sin embargo, dado que el integrando es una función continua, el teorema de Fubini, sin embargo, garantiza que,

$$\iint_R xye^{x^2y} dA = \int_0^1 \int_0^2 xye^{x^2y} dydx = \int_0^2 \int_0^1 xye^{x^2y} dx dy, \text{ con } R = [-1,1] \times [0,2]$$

Donde al invertir el orden de integración y la sustitución $u = x^2y$ (en x), se obtiene,

$$\int_0^2 \int_0^1 xye^{x^2y} dx dy = \frac{1}{2} \int_0^2 (e^{x^2y} |_{x=0}^{x=1}) dy = \frac{1}{2} \int_0^2 (e^y - 1) dy = \frac{e^2 - 3}{2}$$

Ejemplo 4.8. Evaluar la siguiente integral iterada $\int_0^3 \int_{-1}^1 (x^2y^2 - 2y) dx dy$

Solución. Se observa que la función $f(x,y) = x^2y^2 - 2y$ es continua en $R = [-1,1] \times [0,3]$. Luego, desde el teorema Fubini, la integrabilidad de una función definida por una integral,

$$\begin{aligned} \int_0^3 \int_{-1}^1 (x^2y^2 - 2y) dx dy &= \int_0^3 \left(\int_{-1}^1 (x^2y^2 - 2y) dx \right) dy \\ &= \int_0^3 \left(\frac{1}{3} x^3 y^2 - 2xy \right) \Big|_{x=-1}^{x=1} dy = \int_0^3 \left(\frac{2}{3} y^2 - 4y \right) dy \\ &= \left(\frac{2}{9} y^3 - 2y^2 \right) \Big|_{y=0}^{y=3} = -12 \end{aligned}$$

Ejemplo 4.9. Evaluar la siguiente integral iterada $\int_{-\pi}^{\pi} \int_0^1 y \cos(xy) dx dy$

Solución. Se observa que la función $f(x,y) = y \cos(xy)$ es continua en $R = [0,1] \times [-\pi,\pi]$. Luego, desde el teorema Fubini, la integrabilidad de la función definida tendrá por integral,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \int_0^1 y \cos(xy) dx dy = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_0^1 y \cos(xy) dx \right) dy$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(xy) \Big|_{x=0}^{x=1} dy = \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} y dy = -\frac{\cos y}{1} \Big|_{y=-\pi}^{y=\pi} = 0$$

4.2.3. Aplicaciones de los integrales dobles

Las integrales dobles son muy útiles para calcular el área y volumen sobre una región delimitada por curvas de funciones, presentándose varios casos como siguen.

Si la región tiene forma rectangular, podemos encontrar su área integrando la función constante $f(x, y) = 1$ sobre la región R, o sea, la región R está dada por,

$$A(R) = \iint_R 1 dA$$

Esta definición tiene sentido porque usar $f(x, y) = 1$ y evaluar la integral la convierte en un producto de largo y ancho.

Ejemplo 4.10. Encuentre el área de la región $R = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 2\}$ usando una integral doble, es decir, integrando $f(x, y) = 1$ sobre la región R.

Solución. Sea $A = \iint_R 1 dA = \int_0^2 \int_0^3 1 \cdot dx dy = \int_0^2 \left. \frac{x}{1} \right|_{x=0}^{x=3} dy = \int_0^2 3 dy =$

$$\left. \frac{3y}{1} \right|_{y=0}^{y=2} = 6$$

Siguiendo esta misma metodología sobre el uso de las integrales dobles para encontrar el área, el volumen de un sólido acotado arriba por una función $f(x, y) \geq 0$ sobre una región R siempre que $f(x, y) \geq 0$ para todo (x, y) en R, se define por, $V(R) = \iint_R f(x, y) dA$

Ejemplo 4.11. Calcular el volumen V del sólido S que está acotado por el paraboloides elíptico $2x^2 + y^2 + z = 27$, los planos $x = 3$, $y = 3$, y, los tres planos coordenados.

Solución. Se determina el volumen del paraboloides elíptico $2x^2 + y^2 + z = 27$ sobre la región definida por $R = [0, 3] \times [0, 3]$, y reescribiendo $z = 27 - 2x^2 - y^2$, se obtiene,

$$\begin{aligned}
 V(R) &= \iint_R f(x, y) dA = \int_0^3 \int_0^3 (27 - 2x^2 - y^2) dx dy \\
 &= \int_0^1 \left(27x - \frac{2}{3}x^3 - xy^2 \right) \Big|_{x=0}^{x=3} dy = \int_0^2 (63 - y^2) dy = \frac{(63y - y^3)}{1} \Big|_{y=0}^{y=3} = 162 u^3
 \end{aligned}$$

Ejemplo 4.12. Calcular el volumen V del sólido S que está acotado por el cilindro parabólico $z + y^2 = 4$, el plano $x = 3$, y , los tres planos coordenados.

Solución. Se determina el volumen del cilindro parabólico $z = 4 - y^2$ sobre la región definida por $R = [0, 3] \times [0, 2]$, se obtiene,

$$\begin{aligned}
 V(R) &= \iint_R f(x, y) dA = \int_0^2 \int_0^3 (4 - y^2) dx dy \\
 &= \int_0^1 \frac{x(4 - y^2)}{1} \Big|_{x=0}^{x=3} dy = 3 \int_0^2 3(4 - y^2) dy = 3 \left(4y - \frac{y^3}{3} \right) \Big|_{y=0}^{y=2} = 16 u^3
 \end{aligned}$$

Ejemplo 4.13. Calcular el volumen de la región acotada arriba por el paraboloides elíptico $z = 10 + x^2 + 3y^2$ y abajo por el rectángulo $R = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$

Solución. El volumen viene dado por la integral doble siguiente:

$$\begin{aligned}
 V(R) &= \iint_R (10 + x^2 + 3y^2) dA = \int_0^1 \int_0^2 (10 + x^2 + 3y^2) dy dx \\
 &= \int_0^1 \frac{(10y + x^2y + y^3)}{1} \Big|_{y=0}^{y=2} dx = 2 \int_0^1 (10 + x^2 + 4) dx = 2 \left(10x - \frac{x^3}{3} + 4x \right) \Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{86}{3}
 \end{aligned}$$

4.2.4. Cálculo de integrales dobles impropias

En algunos problemas del cálculo multivariado ocurre que uno o ambos rangos de integración son infinitos, para lo cual simplemente se tratan dichas integrales como integrales impropias, tal como se aprendió con las funciones de variable real.

Ejemplo 4.14. Hallar $\iint_R \frac{\text{sen } x}{x} dA$, donde R es el triángulo $0 \leq y \leq x, 0 \leq x \leq \pi$

Solución. Al resolver de manera directa se observa que no es posible debido a la integral indefinida, por lo cual empleando la integral iterada y el teorema de Fubini, se tiene,

$$\int_0^\pi \int_y^\pi \frac{\text{sen } x}{x} dy dx = \int_0^\pi \frac{y \text{sen } x}{x} \Big|_{y=0}^{y=x} dx = \int_0^\pi \text{sen } x dx = \frac{-\cos x}{1} \Big|_{x=0}^{x=\pi} = 2$$

Ejemplo 4.15. Hallar $\iint_R e^{-(x+y)} dA$, donde R es franja seminfinita $x \geq 0, 0 \leq y \leq 1$

Solución. Resolviendo la integración doble iterada mediante el teorema de Fubini, se tiene,

$$\int_0^\infty \int_0^1 e^{-(x+y)} dy dx = \int_0^\infty e^{-x} dx \int_0^1 e^{-y} dy$$

donde hemos tomado el factor e^{-x} , que es independiente de y, de la integral interna. La integral interna se convierte en

$$\int_0^1 e^{-y} dy = \frac{-e^{-y}}{1} \Big|_{y=0}^{y=1} = 1 - e^{-1}$$

$$= (1 - e^{-1}) \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-x} dx = (1 - e^{-1}) \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{-e^{-x}}{1} \Big|_{x=0}^{x=b} = (1 - e^{-1}) \cdot 1 = 1 - e^{-1}$$

Ejemplo 4.16. Hallar $\iint_R \frac{x^2}{1+y^2} dA$, donde R es franja seminfinita $y \geq 0, 0 \leq x \leq 3$

Solución. Resolviendo la integración doble iterada mediante el teorema de Fubini, se tiene,

$$\int_0^3 \int_0^\infty \frac{x^2}{1+y^2} dy dx = \int_0^3 \left(\lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \frac{x^2}{1+y^2} dy \right) dx$$

La integral interna se convierte en:

$$\int_0^\infty x^2 \left(\lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \frac{1}{1+y^2} dy \right) dx = \int_0^3 x^2 \left(\lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{1+y^2} \Big|_{y=0}^{y=b} \right) dx$$

$$= \int_0^3 x^2 \lim_{b \rightarrow \infty} (\tan^{-1} b) dx = \int_0^3 \frac{\pi}{2} x^2 dx = \frac{\pi}{2} \left(\frac{x^3}{3} \Big|_{x=0}^{x=3} \right) = \frac{9\pi}{2}$$

4.3. Integrales dobles en coordenadas polares

4.3.1. Regiones de integración en rectángulos polares

Ciertas integrales dobles resultan fáciles resolverlas al cambiar las coordenadas rectangulares por su equivalente a polares, en especial cuando contamos con regiones circulares, es decir, cuando aparecen funciones de la forma: $f(x, y) = x^2 + y^2$. Como sabemos la relación entre las coordenadas polares y las coordenadas cartesianas están dadas por las siguientes relaciones.

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \operatorname{sen} \theta, \quad r^2 = x^2 + y^2, \quad \tan \theta = y/x$$

Donde la región constituida por todos los puntos $(x, y) = (r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta)$ que satisfacen las condiciones $0 \leq g_1(\theta) \leq r \leq g_2(\theta), \alpha \leq (\beta - \alpha) \leq 2\pi$. Si g_1 y g_2 son funciones continuas en $[\alpha, \beta]$ y f es una función continua en la región R entonces se tiene:

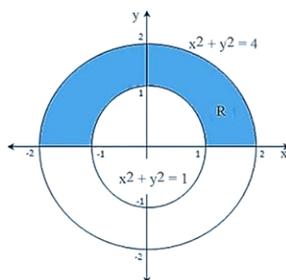
$$\iint_R f(x, y) dA = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{g_1}^{g_2} f(r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta) r \, dr \, d\theta$$

Ejemplo 4.17. Evaluar la integral $\iint_R (3x + 4y^2) dA$, donde R es la región en el semiplano superior acotado por los círculos $x^2 + y^2 = 1$ y $x^2 + y^2 = 4$

Solución. La región R se puede describir como $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y \geq 0, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$

Figura 66

Área de la corona circular



Nota: Autor (2024)

Que corresponde a la mitad del anillo mostrado en la figura que en coordenadas polares está dada por: $1 \leq r \leq 2$ y $0 \leq \theta \leq \pi$, por lo tanto, la integral es igual a:

$$\iint_R (3x + 4y^2) dA = \int_0^\pi \int_1^2 (3r \cos \theta + 4r^2 \sin^2 \theta) r \, dr d\theta$$

$$\int_0^\pi \int_1^2 (3r^2 \cos \theta + 4r^3 \sin^2 \theta) dr d\theta = \int_0^\pi \left(\frac{r^3 \cos \theta + r^4 \sin^2 \theta}{1} \Big|_{r=1}^{r=2} \right) d\theta$$

$$\int_0^\pi \left(7 \cos \theta + \frac{15}{2} (1 - \cos 2\theta) \right) d\theta = \left(7 \cos \theta + \frac{15}{2} (\theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta) \Big|_{\theta=0}^{\theta=\pi} \right) = \frac{15}{2} \pi$$

Ejemplo 4.18. Mediante coordenadas polares se pide determinar el valor de la integral:

$$\int_0^2 \int_x^{\sqrt{8-x^2}} \frac{1}{5+x^2+y^2} dy dx$$

Solución. De los límites de variable real de las integrales, estos expresan la región R de la siguiente forma: $x \leq y \leq \sqrt{8-x^2}$ y $0 \leq x \leq 2$, que, al pasar a coordenadas polares, se obtiene $0 \leq r \leq \sqrt{8}$ y $\pi/4 \leq \theta \leq \pi/2$, con lo cual,

$$\int_0^2 \int_x^{\sqrt{8-x^2}} \frac{1}{5+x^2+y^2} dy dx = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_0^{\sqrt{8}} \frac{1}{5+r^2} r \, dr d\theta = \frac{1}{2} \int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_0^{\sqrt{8}} \frac{2r}{5+r^2} dr d\theta$$

$$\frac{1}{2} \int_{\pi/4}^{\pi/2} \left(\frac{\ln(5+r^2)}{1} \Big|_{r=0}^{r=\sqrt{8}} \right) d\theta = \frac{1}{2} (\ln 13 - \ln 5) \int_{\pi/4}^{\pi/2} d\theta = \frac{\pi}{8} \ln \frac{13}{5}$$

Ejemplo 4.19. Hallar el volumen del sólido que está bajo el hemisferio $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$ sobre la región acotada por la cónica $x^2 + y^2 - y = 0$

Solución. El volumen correspondiente a la función z y restricción dada, corresponde a,

$$V = \iint_R f(x, y) dA = \iint_R \sqrt{1-x^2-y^2} dA = \int_0^{\pi/2} \int_0^{\sin \theta} (1-r^2)^{1/2} r \, dr d\theta$$

$$2 \int_0^{\pi/2} -\frac{1}{3} (1-r^2)^{3/2} \Big|_{r=0}^{r=\sin \theta} d\theta = \frac{2}{3} \int_0^{\pi/2} [1 - (1 - \sin^2 \theta)^{3/2}] d\theta$$

$$\frac{2}{3} \int_0^{\pi/2} [1 - \cos \theta (1 - \sin^2 \theta)^{1/2}] d\theta = \frac{2}{3} \left(\theta - \sin \theta + \frac{1}{3} \sin^3 \theta \right) \Big|_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} = \frac{\pi}{3} - \frac{4}{9}$$

4.3.2. Regiones polares generales de integración

Para evaluar la integral doble de una función continua mediante integrales iteradas sobre regiones polares generales, se parte en disponer de la función de forma polar, o sea, $r = f(\theta)$, por lo cual si se describe una región polar general como $R = \{(r, \theta) \mid \alpha \leq \theta \leq \beta, h_1(\theta) \leq r \leq h_2(\theta)\}$, donde $f(r, \theta)$ es continua en la región polar general, luego, se obtiene,

$$\int f(r, \theta) r dr d\theta = \int_{\theta=\alpha}^{\theta=\beta} \int_{r=h_1(\theta)}^{r=h_2(\theta)} f(r, \theta) r dr d\theta$$

Ejercicio 4.20. Mediante coordenada polar, evaluar la integral $\int_0^\pi \int_1^2 (3x + 4y^2) dA$

Solución. Haciendo las conversiones de cartesianas a polares, se obtiene,

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \int_1^2 (3x + 4y^2) dA &= \int_0^\pi \int_1^2 (3r \cos \theta + 4r^2 \operatorname{sen}^2 \theta) r dr d\theta \\ \int_0^\pi \int_1^2 (3r^2 \cos \theta + 4r^3 \operatorname{sen}^2 \theta) dr d\theta &= \int_0^\pi [3 \cos \theta \int_1^2 r^2 dr + 4 \operatorname{sen}^2 \theta \int_1^2 r^3 dr] d\theta \\ \int_0^\pi \left(3 \left(\frac{r^3}{3} \right) \cos \theta + 4 \left(\frac{r^4}{4} \right) \operatorname{sen}^2 \theta \right) \Big|_{r=1}^{r=2} d\theta \\ &= \int_0^\pi ((2^3 - 1^2) \cos \theta + (2^4 - 1^4) \operatorname{sen}^2 \theta) d\theta \\ \int_0^\pi (7 \cos \theta + 15 \operatorname{sen}^2 \theta) d\theta &= \left(7 \operatorname{sen} \theta + \frac{15}{2} (1 - \cos 2\theta) \right) \Big|_{\theta=0}^{\theta=\pi} \\ &= 7 \operatorname{sen} \pi + \frac{15}{2} (\pi - \cos 2\pi) = \frac{15\pi}{2} \end{aligned}$$

Ejercicio 4.21. Evaluar la integral $\iint_R xy dA$ donde R es la región del primer cuadrante comprendida entre los círculos $x^2 + y^2 = 4$, $x^2 + y^2 = 25$.

Solución. Al tratar de evaluar la integral en coordenadas rectangulares esta se tiene que dividir en dos cuyos límites de integración dado por:

$$R_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x \leq 2, \sqrt{4 - x^2} \leq y \leq \sqrt{25 - x^2}\}$$

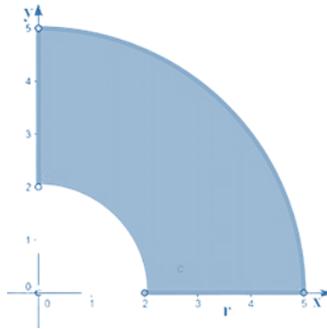
$$R_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 2 \leq x \leq 5, 0 \leq y \leq \sqrt{25 - x^2}\}$$

Por tanto, los límites de integración en coordenadas polares son: $2 \leq r \leq 5, 0 \leq \theta \leq \pi/2$

Realizando los cambios de coordenadas cartesianas a polares, se obtiene:

Figura 67

Integral doble mediante coordenada polar



Nota: Autor (2024)

Realizando los cambios de coordenadas cartesianas a polares, se obtiene:

$$\begin{aligned} \iint_R xy dA &= \int_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} \int_{r=2}^{r=5} (r \cos \theta)(r \sin \theta) r dr d\theta \\ &= \int_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} (\cos \theta \sin \theta) d\theta \int_{r=2}^{r=5} r^3 dr \end{aligned}$$

$$\left(\frac{r^4}{4}\right) \Big|_{r=2}^{r=5} \int_0^{\pi/2} (\cos \theta \sin \theta) d\theta = \left(\frac{625}{4} - \frac{16}{4}\right) \int_0^{\pi/2} (\cos \theta \sin \theta) d\theta$$

$$\frac{609}{8} \int_0^{\pi/2} (2 \cos \theta \sin \theta) d\theta = \frac{609}{8} \left(\frac{\sin^2 \theta}{1}\right) \Big|_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} = \frac{609}{8}$$

Ejercicio 4.22. Calcular el volumen del sólido bajo el paraboloides $z = 4 - x^2 - y^2$, y por encima del disco $(x - 1)^2 + y^2 = 1$, en el plano xy .

Solución. De las funciones dadas, se establece los límites de integración en R como sigue:

Se transforma la expresión $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ en coordenadas polares, se tiene, $r = 2 \cos \theta$

Se puede escribir la región acotada del sólido por $R = \{(r, \theta) / 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq r \leq 2 \cos \theta\}$

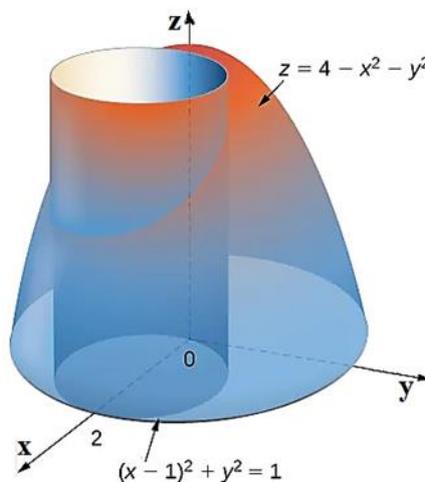
Por lo tanto, el volumen del sólido delimitado arriba por el paraboloides.

$$\iint_R (4 - x^2 - y^2) dA = \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \int_{r=0}^{r=2 \cos \theta} (4 - r^2) dr d\theta = \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \left(2r^2 - \frac{r^4}{4} \right) \Big|_{r=0}^{r=2 \cos \theta} d\theta$$

$$\frac{1}{4} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} (8 \cos^2 \theta - 4 \cos^4 \theta) d\theta = \left(\frac{5\theta}{2} + \frac{5}{2} \sin \theta \cos \theta - \sin \theta \cos^3 \theta \right) \Big|_{\theta=0}^{\theta=\pi} = \frac{5\pi}{2} u^3$$

Figura 68

Volumen mediante coordenada polar



Nota: Autor (2024)

Ejercicio 4.23. Calcular el volumen de la región que se halla bajo el paraboloides $z = x^2 + y^2$ y por encima del triángulo delimitado por las rectas $y = x, x = 0,$ y $x + y = 2$ en el plano xy

Solución. De las funciones dadas, se establece los límites de integración en R como sigue:

Se convierten las rectas $y = x, x = 0,$ y $x + y = 2$ en coordenadas polares, con lo cual se obtiene, $\theta = \pi/4,$

$$\theta = \pi/2, r = 2/(\sin \theta + \cos \theta), \text{ y la ecuación de superficie } z = x^2 + y^2 = r^2$$

Esto nos conduce a definir la región acotada del sólido por: $R = \{(r, \theta) / \pi/4 \leq \theta \leq \pi/2, 0 \leq r \leq 2/(\sin \theta + \cos \theta)\}$

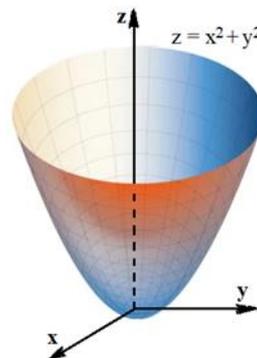
Por lo tanto, el volumen del sólido delimitado por la siguiente integral doble,

$$\iint_R (x^2 + y^2) dA = \int_{\theta=\frac{\pi}{4}}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \int_{r=0}^{r=2/(\text{sen } \theta + \text{cos } \theta)} r^3 dr d\theta$$

$$\int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \left(\frac{r^4}{4} \right) \Big|_{r=0}^{r=2/(\text{sen } \theta + \text{cos } \theta)} d\theta = 4 \int_{\theta=\frac{\pi}{4}}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\text{sen } \theta + \text{cos } \theta} \right)^4 d\theta = \frac{4}{3} u^3$$

Figura 69

Volumen mediante coordenada polar



Nota: Autor (2024)

4.4. Integrales triples

4.4.1. Integrales triples sobre una región acotada general

Ahora que sabemos cómo integrar en una región bidimensional, se analiza la integración en una región tridimensional. Usamos una integral doble para integrar en una región bidimensional, por lo que no debería sorprendernos que se emplee una integral triple para integrar en una región tridimensional. La notación para las integrales triples generales es,

$$\iiint_E f(x, y, z) dV$$

Partiendo de manera simple al integrar sobre la caja definida por la región espacial:

$$B = [a, b] \times [c, d] \times [r, s]$$

Debe recordarse que cuando utilizamos esta notación se lista las x primero, las y y segundo de y y finalmente las z . La integral triple en este caso es,

$$\iiint_E f(x, y, z) \, dV = \int_r^s \int_c^d \int_a^b f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$$

Debe tenerse en cuenta que aquí se está integrando con respecto a x primero, luego y , y, finalmente z , pero de hecho no hay razón para las integrales en este orden. Hay 6 órdenes diferentes posibles para hacer la integral y el orden en el que se realice la integral dependerá de la función y del orden que sea más fácil. Sin embargo, siempre debe obtenerse la misma respuesta independientemente del orden.

Ejemplo 4.24. Sea la región definida por $E = [2,3] \times [1,2] \times [0,1]$, se pide determinar el valor de la siguiente integral:

$$\iiint_E 8xyz \, dV$$

Solución. Recordando que el orden de integración no importa, se usará un orden diferente al mencionado anteriormente, luego se obtiene,

$$\begin{aligned} \iiint_E 8xyz \, dV &= \int_1^2 \int_2^3 \int_0^1 8xyz \, dx \, dy \, dz = \int_1^2 \int_2^3 \left(\frac{4xyz^2}{1} \right) \Big|_{z=0}^{z=1} dx \, dy \\ \int_1^2 \int_2^3 4xy \, dx \, dy &= \int_1^2 \left(\frac{2x^2y}{1} \right) \Big|_{x=2}^{x=3} dy = \int_1^2 10y \, dy = 5 \left(\frac{y^2}{1} \right) \Big|_{y=1}^{y=2} = 15 \end{aligned}$$

Ejemplo 4.25. Sea la región definida por $E = [2,3] \times [-1,4] \times [0,1]$, se pide determinar el valor de la siguiente integral:

$$\iiint_E (4x^2y - z^3) \, dV$$

Solución. Integrando en el orden dado y recordando que al igual que con las integrales dobles, comenzamos con la integral "interior" y trabajando hacia afuera, se obtiene,

$$\begin{aligned} \iiint_E (4x^2y - z^3) dV &= \int_2^3 \int_{-1}^4 \int_1^0 (4x^2y - z^3) dz dy dx = \int_1^2 \int_2^3 \left(4x^2yz - \frac{z^4}{4} \right) \Big|_{z=1}^{z=0} dy dx \\ \int_1^2 \int_2^3 \left(\frac{1}{4} - 4x^2y \right) dy dx &= \int_1^2 \left(\frac{1}{4}y - 2x^2y^2 \right) \Big|_{y=-1}^{y=4} dx \\ \int_1^2 \left(\frac{5}{4} - 30x^2 \right) dx &= 5 \left(\frac{1}{4}x - 2x^3 \right) \Big|_{x=2}^{x=3} = -\frac{755}{4} \end{aligned}$$

Ejemplo 4.26. Evaluar la integral: $\iiint_E 6z^2 dV$ donde E es la región debajo del plano $4x + y + 2z = 0$ en el primer octante.

Solución. Para este problema, la región E es solo la región que está debajo del plano $4x + y + 2z = 0$ en el primer octante, en otras palabras, la gráfica del plano de arriba es exactamente la parte superior de la región E. La parte inferior de la región es el plano x y, mientras que los lados son simplemente los planos yz y xz, esto nos da el siguiente límite, $0 \leq z \leq 5 - 2x - y/2$, con estos límites se obtiene la integral triple de la siguiente manera,

$$\iiint_E 6z^2 dV = \iint_D \left(\int_0^{5-2x-\frac{y}{2}} 6z^2 dz \right) dA$$

Los límites de la integral doble sobre D se definen $R = \{(x, y) / 0 \leq x \leq 5/2, 0 \leq y \leq 10 - 4x\}$

Con estos límites aplicados en la integral doble, se obtiene,

$$\begin{aligned} \iiint_E 6z^2 dV &= \int_0^{\frac{5}{2}} \int_0^{10-4x} \int_0^{5-2x-\frac{y}{2}} 6z^2 dz dy dx = \int_0^{\frac{5}{2}} \int_0^{10-4x} \frac{(2z^3)}{1} \Big|_0^{5-2x-\frac{y}{2}} dy dx = \\ \int_0^{\frac{5}{2}} \int_0^{10-4x} 2 \left(5 - 2x - \frac{y}{2} \right)^3 dy dx &= - \int_0^{\frac{5}{2}} \left(5 - 2x - \frac{y}{2} \right)^4 \Big|_0^{10-4x} dx \\ \int_0^{\frac{5}{2}} (5 - 2x)^4 dx &= \frac{1}{10} \frac{(5 - 2x)^5}{1} \Big|_0^{\frac{5}{2}} = \frac{625}{2} \end{aligned}$$

Ejemplo 4.27. Evaluar la integral: $\iiint_E \sqrt{3x^2 + 3z^2} \, dV$ donde E es el sólido limitado por $y = 2x^2 + 2z^2$ y el plano $y = 8$.

Solución. Como la región no tiene la componente y, se puede considerar a z en vez de y en las fórmulas, lo cual nos conduce a la fórmula, $x^2 + z^2 = r^2$, con lo cual se logra los siguientes límites de integración: $2x^2 + 2z^2 \leq y \leq 8$, que al cambiar a coordenadas polares, se obtiene, $0 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta \leq 2\pi$, luego, la integral es entonces,

$$\begin{aligned} \iiint_E \sqrt{3x^2 + 3z^2} \, dV &= \iint_D \left(\int_{x^2+z^2}^8 \sqrt{3x^2 + 3z^2} \, dy \right) dA \\ \iint_D \frac{y\sqrt{3x^2 + 3z^2}}{1} \Big|_{x^2+z^2}^8 dA &= \iint_D \sqrt{3x^2 + 3z^2} (8 - (2x^2 + 2z^2)) \, dA \end{aligned}$$

A fin de simplificar el cálculo, se transforma la integral doble en coordenadas polares,

$$\iint_D \sqrt{3x^2 + 3z^2} (8 - (2x^2 + 2z^2)) \, dA = \iint_D \sqrt{3} (8r - 2r^3) \, dA$$

Además, la región acotada del sólido corresponde a $R = \{(r, \theta) / 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 2\}$

$$\sqrt{3} \int_0^{2\pi} \int_0^2 (8r - 2r^3) \, r \, dr \, d\theta = \sqrt{3} \int_0^{2\pi} \left(\frac{8r^3}{3} - \frac{2}{5} r^5 \right) \Big|_0^2 \, d\theta$$

$$\sqrt{3} \int_0^{2\pi} \frac{128}{5} \, d\theta = \frac{256\sqrt{3}}{15} \pi$$

4.4.2. Integrales triples en coordenadas cilíndricas

En algunas ocasiones resulta conveniente transformar las integrales triples expresadas en coordenadas cartesianas a su equivalente en coordenadas cilíndricas. Recordando que las coordenadas cilíndricas en realidad no son más que una extensión de las coordenadas polares en tres dimensiones. Las siguientes son las fórmulas de conversión para coordenadas cilíndricas.

$$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, z = z$$

Para hacer la integral en coordenadas cilíndricas, se necesita conocer que dV se expresará en términos de coordenadas cilíndricas, por tanto, se establece $dV = r \, dz \, dr \, d\theta$

La región, E , sobre la cual se realiza la integración se convierte en,

$$E = \{(x, y, z) / (x, y) \in D, u_1(x, y) \leq z \leq u_2(x, y)\}, \text{ es decir,}$$

$$E = \{(r, \theta, z) / \alpha \leq \theta \leq \beta, h_1(\theta) \leq r \leq h_2(\theta), u_1(r \cos \theta, r \sin \theta) \leq z \leq u_2(r \cos \theta, r \sin \theta)\}$$

En resumen, en términos de coordenadas cilíndricas, una integral triple es de la forma:

$$\iiint_E f(x, y, z) \, dV = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)} \int_{u_1(r \cos \theta, r \sin \theta)}^{u_2(r \cos \theta, r \sin \theta)} r f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) \, dz \, dr \, d\theta$$

Ejemplo 4.28. Evaluar $\iiint_E y \, dV$ donde E es la región que se encuentra debajo del plano $z = x + 2$ y por encima del plano xy y entre los cilindros $x^2 + y^2 = 1$ y $x^2 + y^2 = 4$.

Solución. Se inicia por definir el rango de z en términos de coordenadas cilíndricas, o sea,

$$0 \leq z \leq x + 2, \text{ o sea, } 0 \leq z \leq r \cos \theta + 2$$

Se observa que el cuerpo se ubica por encima del plano xy y por lo tanto por encima del plano $z = 0$, a continuación, la región D es la región entre $x^2 + y^2 = 1$ y $x^2 + y^2 = 4$, lo que nos permite definir la siguiente región $1 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta \leq 2\pi$, cuya integral será:

$$\iiint_E y \, dV = \int_0^{2\pi} \int_1^2 \int_0^{r \cos \theta + 2} (r \cos \theta) r \, dz \, dr \, d\theta = \int_0^{2\pi} \int_1^2 r^2 \cos \theta (r \cos \theta + 2) \, dr \, d\theta$$

$$\int_0^{2\pi} \int_1^2 \left(\frac{1}{2} r^3 \sin(2\theta) + 2r^2 \cos \theta \right) \, dr \, d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{8} r^4 \sin(2\theta) + \frac{2}{3} r^3 \sin \theta \right) \Big|_1^2 \, d\theta$$

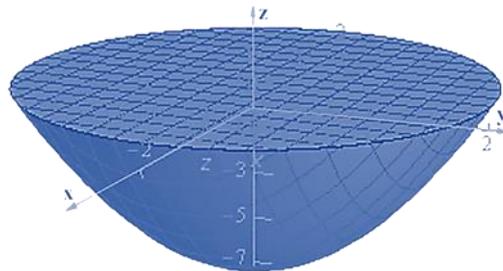
$$\int_0^{2\pi} \left(\frac{15}{8} \sin(2\theta) + \frac{14}{3} \sin \theta \right) d\theta = \left(-\frac{15}{16} \cos(2\theta) - \frac{14}{3} \cos \theta \right) \Big|_0^{2\pi} = 0$$

Ejemplo 4.29. Evaluar $\iiint_E 4xy \, dV$, con E acotada por $z = 2x^2 + 2y^2 - 7$ y $z = 1$

Solución. Se inicia por definir el rango de z en términos de coordenadas cilíndricas, o sea, $2x^2 + 2y^2 - 7 \leq z \leq 1$, o sea, $2r^2 - 7 \leq z \leq 1$

Figura 70

Volumen mediante coordenada polar



Nota: Autor (2024)

Para este problema, D es el disco que “tapa” la región el cuerpo, y cuya ecuación se obtiene igualando las dos ecuaciones del enunciado del problema, es decir, si D es el disco $x^2 + y^2 \leq 4$ y usando coordenadas cilíndricas para esta integral, se tiene los siguientes límites para este problema, $0 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 2r^2 - 7 \leq z \leq 1$, donde, al conectar estos límites a la integral y convertirlos a coordenadas cilíndricas se obtiene,

$$\iiint_E 4xy \, dV = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_{2r^2-7}^1 4(r \cos \theta)(r \sin \theta) r \, dz \, dr \, d\theta$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_{2r^2-7}^1 4r^3 \sin \theta \cos \theta \, dz \, dr \, d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \frac{z(4r^3 \sin \theta \cos \theta)}{1} \Big|_{2r^2-7}^1 \, dr \, d\theta$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^2 4r^3(8 - 2r^2) \sin \theta \cos \theta \, dr \, d\theta = \left(8r^4 - \frac{4}{3}r^6 \right) \Big|_1^2 \int_0^{2\pi} \sin \theta \cos \theta \, d\theta$$

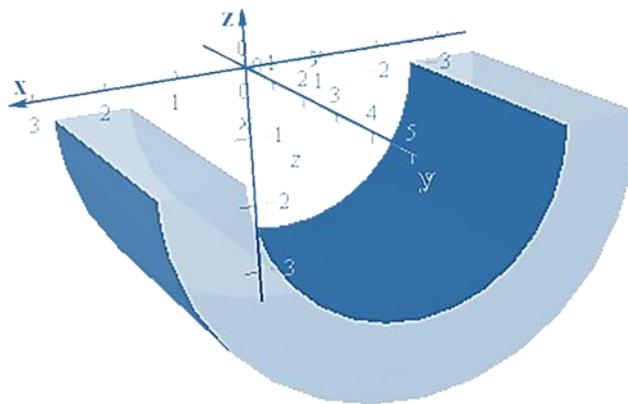
$$\frac{128}{3} \int_0^{2\pi} \sin \theta \cos \theta \, d\theta = \frac{64}{3} \int_0^{2\pi} 2 \sin \theta \cos \theta \, d\theta = \left(-\frac{32}{3} \cos(2\theta) \right) \Big|_0^{2\pi} = 0$$

Ejemplo 4.30. Evaluar $\iiint_E e^{-x^2-z^2} dV$, donde E es la región entre los dos cilindros $x^2 + z^2 = 4$ y $x^2 + z^2 = 9$, con $1 \leq y \leq 5$ y $z \leq 0$

Solución. Las funciones $x^2 + z^2 = 4$ y $x^2 + z^2 = 9$ se definen como cilindros de radio 2 y 3 en su orden, los cuales están centrados en el eje y. El rango $1 \leq y \leq 5$ nos dice que solo tendremos los cilindros en este rango de y. Finalmente el semiplano $z \leq 0$ nos dice que solo nos quedará la mitad inferior de cada uno de los cilindros, luego se obtiene,

Figura 71

Volumen mediante coordenada polar



Nota: Autor (2024)

El plano frontal de E es solo la porción del plano $y = 5$ que cubre el frente y el plano posterior de E es la porción del plano $y = 1$ que cubre la parte posterior de la región, entonces, según la gráfica, primero se necesita integrar con respecto a y. En este caso, esto es aún más fácil porque tanto la parte posterior como la anterior de las superficies son solo los planos $y = 5$ y $y = 1$ respectivamente. Eso significa que los límites de y son, $1 \leq y \leq 5$

Luego, se puede describir fácilmente el anillo en términos de r y θ , por lo que se pueden resumir las coordenadas cilíndricas para este problema como sigue,

$$\pi \leq \theta \leq 2\pi, \quad 2 \leq r \leq 3, \quad 1 \leq y \leq 5$$

Al vincular estos límites con la integral y convertirlos a coordenadas cilíndricas se obtiene,

$$\iiint_E e^{-x^2-z^2} dV = \int_{\pi}^{2\pi} \int_2^3 \int_1^5 r e^{-r^2} dz dr d\theta = \int_{\pi}^{2\pi} \int_2^3 \frac{r e^{-r^2}}{1} \Big|_1^5 dr d\theta$$

$$4 \int_{\pi}^{2\pi} \int_0^2 r e^{-r^2} dr d\theta = -2 \int_{\pi}^{2\pi} \frac{e^{-r^2}}{1} \Big|_2^3 d\theta = 2 \int_{\pi}^{2\pi} (e^{-4} - e^{-9}) d\theta$$

$$2 \frac{(e^{-4} - e^{-9})}{1} \theta \Big|_{\pi}^{2\pi} = 2\pi(e^{-4} - e^{-9})$$

4.4.3. Integrales triples en coordenadas esféricas

En la sección anterior se consideró las integrales en términos de coordenadas cilíndricas, ahora se busca resolver de manera simplificada ejercicios de integrales múltiples en términos de coordenadas esféricas, para lo cual, partiendo de lo visto en cursos previos de cálculo se llegó a las siguientes fórmulas de conversión para coordenadas esféricas:

$$x = \rho \operatorname{sen} \varphi \cos \theta, \quad y = \rho \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta, \quad z = \rho \cos \varphi, \quad x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$$

Sujeta a las siguientes restricciones: $\rho \geq 0, 0 \leq \varphi \leq \pi$

Donde por lo general las integrales se las restringe a la mitad de la esfera dada por E. Esto significa que se debe tomar rangos para las variables de la siguiente manera,

$$a \leq \rho \leq b, \quad \alpha \leq \theta \leq \beta, \quad \delta \leq \varphi \leq \gamma$$

Con lo cual se obtiene como el diferencial de volumen de $dV = \rho^2 \cos \varphi d\rho d\theta d\varphi$ y por tanto la integral pasa a tomar la forma de:

$$\iiint_E f(x, y, z) dV = \int_{\delta}^{\gamma} \int_{\alpha}^{\beta} \int_a^b \rho^2 \operatorname{sen} \varphi f(\rho \operatorname{sen} \varphi \cos \theta, \rho \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta, \rho \cos \varphi) d\rho d\theta d\varphi$$

Ejemplo 4.31. Evaluar $\iiint_E 16z dV$, donde E es la mitad superior de la esfera

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

Solución. Como se considera la mitad superior de la esfera, los límites de las variables son:

$$0 \leq \rho \leq 1, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi/2$$

Luego, se obtiene,

$$\iiint_E 16z \, dV = \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \rho^2 \operatorname{sen} \varphi (16 \rho \cos \varphi) \, d\rho \, d\theta \, d\varphi$$

$$\int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \int_0^1 8\rho^3 \operatorname{sen}(2\varphi) \, d\rho \, d\theta \, d\varphi = \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(2\varphi) \, d\theta \, d\varphi$$

$$4\pi \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}(2\varphi) \, d\varphi = -\left. \frac{4\pi \cos(2\varphi)}{2} \right|_1^5 = 2\pi$$

Ejemplo 4.32. Evaluar $\iiint_E xz \, dV$, donde E está dentro de $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ y del cono (apuntando hacia arriba) que forma un ángulo de $\pi/3$ con el eje z negativo y tiene $x \leq 0$.

Solución. Primero, se debe elegir cuidadosamente los límites, donde la región E es básicamente un cono invertido que se ha cortado por la mitad de modo que solo queda la porción con $x \leq 0$. Por lo tanto, se obtienen los siguientes límites:

$$0 \leq \rho \leq 2, \quad \pi/2 \leq \theta \leq 3\pi/2, \quad 2\pi/3 \leq \varphi \leq \pi/2$$

Luego, se obtiene,

$$\iiint_E xz \, dV = \int_{2\pi/3}^{\pi} \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \int_0^2 (\rho \cos \varphi)(\rho \operatorname{sen} \varphi \cos \theta) \rho^2 \operatorname{sen} \varphi \, d\rho \, d\theta \, d\varphi$$

$$\int_{2\pi/3}^{\pi} \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \int_0^2 \rho^4 \cos \varphi \operatorname{sen}^2 \varphi \cos \theta \, d\rho \, d\theta \, d\varphi$$

$$\frac{32}{5} \int_{2\pi/3}^{\pi} \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \cos \varphi \operatorname{sen}^2 \varphi \cos \theta \, d\rho \, d\theta \, d\varphi = -\frac{64}{5} \int_{2\pi/3}^{\pi} \cos \varphi \operatorname{sen}^2 \varphi \, d\theta \, d\varphi$$

$$-\left. \frac{64 \operatorname{sen}^3(\varphi)}{15} \right|_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} = \frac{8\sqrt{3}}{5}$$

Ejemplo 4.33. Evaluar $\iiint_E (x^2 + y^2) \, dV$, donde E es la porción de la región

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4 \text{ con } y \geq 0$$

Solución. Ahora, dado que estamos integrando una porción de una esfera de radio 2, tiene sentido usar coordenadas esféricas para la integral y los límites son,

$$0 \leq \rho \leq 2, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi$$

Luego, se obtiene,

$$\iiint_E (x^2 + y^2) dV = \int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^2 [(\rho \operatorname{sen} \varphi \cos \theta)^2 + (\rho \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta)^2] \rho^2 \operatorname{sen} \varphi d\rho d\theta d\varphi$$

$$\int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^2 (\rho^2 \operatorname{sen}^2 \varphi \cos^2 \theta + \rho^2 \operatorname{sen}^2 \varphi \operatorname{sen}^2 \theta) \rho^2 \operatorname{sen} \varphi d\rho d\theta d\varphi$$

$$\int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^2 \rho^2 \operatorname{sen}^2 \varphi (\cos^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta) \rho^2 \operatorname{sen} \varphi d\rho d\theta d\varphi$$

$$\int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^2 \rho^4 \operatorname{sen}^3 \varphi d\rho d\theta d\varphi = \int_0^\pi \int_0^\pi \frac{1}{5} \rho^5 \operatorname{sen}^3 \varphi \Big|_0^2 d\theta d\varphi$$

$$\int_0^\pi \int_0^\pi \frac{1}{5} \rho^5 \operatorname{sen}^3 \varphi \Big|_0^2 d\theta d\varphi = \frac{32}{5} \int_0^\pi \int_0^\pi \operatorname{sen}^3 \varphi d\theta d\varphi$$

$$\int_0^\pi \frac{32 \theta \operatorname{sen}^3 \varphi}{5} \Big|_0^\pi d\varphi = \frac{32}{5} \int_0^\pi \pi \operatorname{sen}^3 \varphi d\varphi = \frac{32}{5} \int_0^\pi \pi \operatorname{sen}^2 \varphi \operatorname{sen} \varphi d\varphi$$

$$\frac{32}{5} \pi \int_0^\pi (1 - \cos^2 \varphi) \operatorname{sen} \varphi d\varphi = -\frac{32 \pi}{5} \left(\cos \varphi - \frac{1}{3} \cos^3 \varphi \right) \Big|_0^\pi = \frac{128 \pi}{5}$$

Ejemplo 4.34. Evaluar $\iiint_E x^2 dV$, donde E es la porción de la región entre las funciones

$$x^2 + y^2 + z^2 = 36 \quad y \quad z = -\sqrt{3x^2 + 3y^2}$$

Solución. Los límites para ρ y θ corresponden simplemente al radio de la esfera y a la cantidad de esfera que obtenemos al girar alrededor del eje z , sin embargo, los límites para φ no están dados explícitamente de ninguna manera, pero se puede obtener de la ecuación del cono. Primero, se conoce que, en términos de coordenadas cilíndricas, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ y se conoce que, en términos de coordenadas esféricas, $r = \rho \operatorname{sen} \varphi$, luego, al convertir la ecuación del cono a coordenadas esféricas, se obtiene,

$$0 \leq \rho \leq 6, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 5\pi/6 \leq \varphi \leq \pi$$

Luego, se obtiene,

$$\begin{aligned} \iiint_E x^2 dV &= \int_{5\pi/6}^{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^6 [(\rho \operatorname{sen} \varphi \cos \theta)^2 + (\rho^2 \operatorname{sen} \varphi)] d\rho d\theta d\varphi \\ &= \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \left. \frac{\rho^5 \operatorname{sen}^3 \varphi \cos^2 \theta}{5} \right|_0^6 d\theta d\varphi = \frac{7776}{5} \int_{5\pi/6}^{\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^3 \varphi \cos^2 \theta d\theta d\varphi \\ &= \frac{3888}{5} \int_{5\pi/6}^{\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^3 \varphi \left(\theta + \frac{\operatorname{sen}(2\theta)}{2} \right) \Big|_0^{2\pi} d\varphi \\ &= \frac{7776\pi}{5} \int_{5\pi/6}^{\pi} \operatorname{sen}^3 \varphi d\varphi = \frac{7776\pi}{5} \int_{5\pi/6}^{\pi} \operatorname{sen}^2 \varphi \operatorname{sen} \varphi d\varphi \\ &= \frac{7776\pi}{5} \int_{5\pi/6}^{\pi} \pi \operatorname{sen}^3 \varphi d\varphi = \frac{7776\pi}{5} \int_{5\pi/6}^{\pi} \pi (1 - \cos^2 \varphi) \operatorname{sen} \varphi d\varphi \\ &= -\frac{7776\pi}{5} \left(\cos \varphi - \frac{1}{3} \cos^3 \varphi \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{7776\pi}{5} \left(\frac{2}{3} - \frac{3\sqrt{3}}{8} \right) \end{aligned}$$

Ejemplo 4.35. Evaluar la siguiente integral convirtiéndola primero a una integral en coordenadas esféricas:

$$\int_{-1}^0 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{\sqrt{6x^2+6y^2}}^{\sqrt{7-x^2-y^2}} 18y dz dy dx$$

Solución. De los límites de integración, se obtiene,

$$-1 \leq x \leq 0, \quad \sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}, \quad -\sqrt{7-x^2-y^2} \leq z \leq \sqrt{7-x^2-y^2}$$

Que al convertir en coordenadas esféricas corresponden a,

$$0 \leq \rho \leq \sqrt{7}, \quad \pi/2 \leq \theta \leq 3\pi/2, \quad 0 \leq \varphi \leq \tan^{-1}(1/\sqrt{6}) = 0.39$$

Lo anterior nos lleva a la siguiente integral en coordenadas esféricas,

$$\begin{aligned} \iiint_E 18y dV &= \int_0^{0.39} \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \int_0^{\sqrt{7}} (18 \rho \operatorname{sen} \varphi \cos \theta) (\rho^2 \operatorname{sen} \varphi) d\rho d\theta d\varphi \\ &= \int_0^{0.39} \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \int_0^{\sqrt{7}} (18\rho^3 \operatorname{sen}^2 \varphi \operatorname{sen} \theta) d\rho d\theta d\varphi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^{0.39} \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \left(\frac{9}{2} \rho^4 \operatorname{sen}^2 \varphi \operatorname{sen} \theta \right) \Big|_0^{\sqrt{7}} d\theta d\varphi \\
 &= \frac{441}{2} \int_0^{0.39} \int_{\pi/2}^{3\pi/2} (\operatorname{sen}^2 \varphi \operatorname{sen} \theta) d\theta d\varphi \\
 &= -\frac{441}{2} \int_0^{0.39} \left. \frac{\operatorname{sen}^2 \varphi \operatorname{sen} \theta}{1} \right|_0^{\pi} d\varphi = \int_0^{0.39} 0 d\varphi = 0
 \end{aligned}$$

Nota: En ocasiones la integral múltiple valdrá cero si se está analizando fuera de la región D.

4.5. Aplicaciones de la integral múltiple

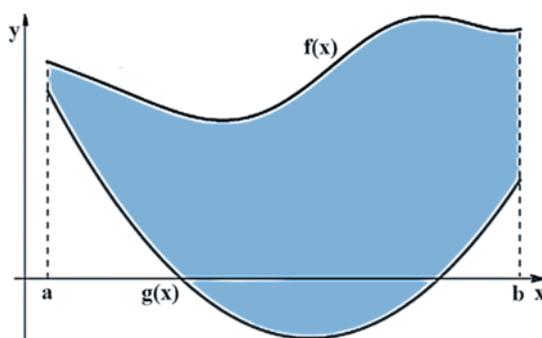
- **Cálculo de centros de masa y momentos de inercia**

En este apartado se va a determinar el centro de masa o centroide de una placa delgada con densidad uniforme ρ . El centro de masa o centroide de una región es el punto en el que la región estará perfectamente equilibrada horizontalmente si se suspende de ese punto.

Entonces, supongamos que la placa es la región limitada por las dos curvas $f(x)$ y $g(x)$ en el intervalo $[a, b]$. Entonces, queremos encontrar el centro de masa de la región siguiente.

Figura 72

Aplicación integral múltiple: área entre curvas



Nota: Autor (2024)

Donde el cálculo de la masa de la región se corresponde con la siguiente expresión,

$$M = \rho A, \quad \text{siendo,} \quad \rho = \text{densidad y } A = \text{área de la región} \rightarrow M = \rho \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$$

A continuación, se determina los momentos de la región, los cuales se denotan por M_x y M_y , y miden la tendencia de la región a girar alrededor de los ejes x e y respectivamente. Estos momentos están dados por las siguientes expresiones,

$$M_x = \rho \int_a^b \frac{1}{2} ([f(x)]^2 - [g(x)]^2) dx, \quad M_y = \rho \int_a^b x[f(x) - g(x)] dx$$

Luego, las coordenadas del centro de masa, (\bar{x}, \bar{y}) corresponde a,

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{\rho \int_a^b x[f(x) - g(x)] dx}{\rho \int_a^b [f(x) - g(x)] dx} = \frac{1}{A} \int_a^b x[f(x) - g(x)] dx$$

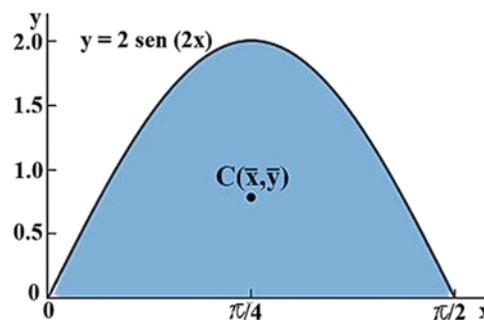
$$\bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{\rho \int_a^b \frac{1}{2} ([f(x)]^2 - [g(x)]^2) dx}{\rho \int_a^b [f(x) - g(x)] dx} = \frac{1}{A} \int_a^b \frac{1}{2} ([f(x)]^2 - [g(x)]^2) dx$$

Ejemplo 4.36. Calcular el centro de masa para la región limitada por $y = 2\text{sen}(2x)$, $y = 0$ en el intervalo $[0, \pi/2]$.

Solución. A continuación, se muestra la gráfica de la región con el centro de masa indicado con un punto.

Figura 73

Centro de masa de una placa



Nota: Autor (2024)

A partir de la expresión para hallar el área de la región, se obtiene,

$$A = \int_0^{\pi/2} 2\text{sen}(2x) dx = -\frac{2\cos(2x)}{2} \Big|_0^{\pi/2} = 2$$

Cálculo del momento en x ,

$$M_x = \rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \operatorname{sen}^2(2x) dx = \rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos(4x)) dx$$

$$M_x = \rho \left(1 - \frac{\operatorname{sen}(4x)}{4} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \rho \frac{\pi}{2}$$

Cálculo del momento en y,

$$M_y = \rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x \operatorname{sen}(2x) dx = \rho \left[- \left(\frac{x \operatorname{sen}(2x)}{1} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \right) + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2x) dx \right]$$

$$M_y = \rho \left(- \frac{x \operatorname{sen}(2x)}{1} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \right) + \frac{\operatorname{sen}(2x)}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \rho \frac{\pi}{2}$$

Luego, las coordenadas del centro de masa corresponden a,

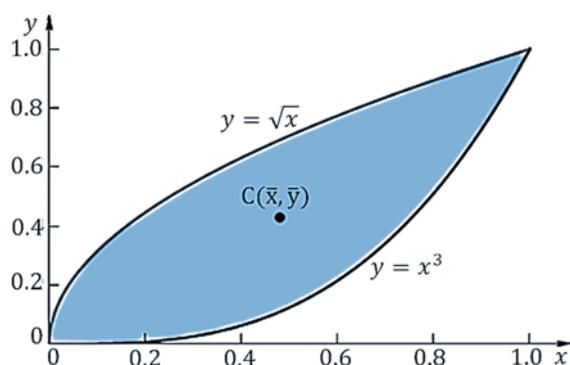
$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{\rho \frac{\pi}{2}}{2\rho} = \frac{\pi}{4}, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{\rho \frac{\pi}{2}}{2\rho} = \frac{\pi}{4}, \text{ o sea, } C\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$$

Ejemplo 4.37. Calcular el centro de masa para la región limitada por $y = x^3$, $y = \sqrt{x}$

Solución. Las funciones se cortan en el punto (1,1), tal como se muestra en la gráfica, donde el punto indica el centro de masa.

Figura 74

Centro de masa de una placa



Nota: Autor (2024)

A partir de la expresión para hallar el área de la región, se obtiene,

$$A = \int_0^{\pi/2} \sqrt{x} - x^3 dx = -\left(\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{1}{4}x^4\right)\Big|_0^1 = \frac{5}{12}$$

Cálculo del momento en x,

$$M_x = \rho \int_0^1 \frac{1}{2}(x - x^6) dx = \rho \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{7}x^7\right)\Big|_0^1 = \frac{5\rho}{28}$$

Cálculo del momento en y,

$$M_y = \rho \int_0^1 x(\sqrt{x} - x^3) dx = \rho \int_0^1 (x^{3/2} - x^4) dx = \rho \left(\frac{2}{5}x^{5/2} - \frac{1}{5}x^5\right)\Big|_0^1 = \frac{\rho}{5}$$

Luego, las coordenadas del centro de masa corresponden a,

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{\frac{\rho}{5}}{\frac{5\rho}{12}} = \frac{12}{25}, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{\frac{5\rho}{28}}{\frac{5\rho}{12}} = \frac{3}{7}, \quad C\left(\frac{12}{25}, \frac{3}{7}\right)$$

En el apartado anterior se analizó el cálculo del centroide de placas planas mediante integrales simples, lo cual puede ser extendido al caso de funciones multivariable donde un objeto plano idealizado que es lo suficientemente delgado puede ser visto como una región plana bidimensional o lámina. Esta lámina se llama homogénea si su composición es uniforme en todas partes y no homogénea de lo contrario. La densidad de una lámina homogénea se define como su masa por unidad de área. Así, la densidad ρ de una lámina homogénea de masa M y área A está dada por $\rho = M/A$, donde M puede hallarse a partir de, $M = \iint_R \rho(x,y) dA$.

Ejemplo 4.38. Una lámina triangular con vértices $(0,0)$, $(0,1)$ y $(1,0)$ tiene función de densidad $\rho(x,y) = xy$, se pide determinar su masa total.

Solución. Respecto a la fórmula $M = \iint_R \rho(x,y) dA$, se tiene que la masa de la lámina es,

$$M = \iint_R xy dA = \int_0^1 \int_0^{-x+1} xy dy dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{2}xy^2\right)\Big|_0^{-x+1} dx$$

$$M = \int_0^1 \left(\frac{1}{2}x^3 - x^2 + \frac{1}{2}x\right) dx = \left(\frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^2\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{8} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{1}{24} \text{ unid. masa}$$

- **Centro de gravedad de una placa o lámina delgada**

Supongamos que una lámina con una función de densidad continua $\rho(x, y)$ ocupa una región R en un plano xy horizontal, al igual que en el caso unidimensional, las ideas ya tratadas anteriormente pueden extenderse a masas distribuidas en un espacio bidimensional, o sea, si se considera el plano xy como una lámina ingravida que soporta una masa puntual m ubicada en un punto (x, y) , entonces la tendencia de la masa a producir una rotación de la lámina alrededor de la línea $x = a$ es $m(x - a)$, llamado momento de m respecto de $x = a$, y la tendencia de la masa a producir rotación alrededor de la recta $y = c$ es $m(y - c)$, llamado momento de m respecto de $y = c$, o sea,

$$\left[\begin{array}{l} \text{momento de masa} \\ \text{alrededor de} \\ \text{la recta } x = a \end{array} \right] = m(x - a), \quad \text{y} \quad \left[\begin{array}{l} \text{momento de masa} \\ \text{alrededor de} \\ \text{la recta } y = c \end{array} \right] = m(y - c)$$

A partir de lo cual se obtiene,

$$\iint_R (x - \bar{x})\rho(x, y)dA = 0, \quad \iint_R (y - \bar{y})\rho(x, y)dA = 0$$

Como \bar{x} y \bar{y} son constantes, estas ecuaciones se pueden reescribirse como sigue,

$$\iint_R x\rho(x, y)dA = \bar{x} \iint_R \rho(x, y)dA, \quad \iint_R y\rho(x, y)dA = \bar{y} \iint_R \rho(x, y)dA$$

de donde se obtiene las siguientes fórmulas para el centro de gravedad de una placa:

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{\iint_R x\rho(x, y)dA}{\iint_R \rho(x, y)dA}, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{\iint_R y\rho(x, y)dA}{\iint_R \rho(x, y)dA}$$

Ejemplo 4.39. Una placa delgada cubre una región triangular D del plano xy delimitada por el eje x y las rectas $x = 1$ e $y = 2x$ en el primer cuadrante. La densidad de la placa en el punto $(x, y) \in D$ es $\rho(x, y) = 6x + 6y + 6$. Determinar la masa, los primeros momentos y el centro de masa de la placa con respecto a los ejes de coordenadas.

Solución. Se define la región de la placa como sigue, $D = \{(x, y) / 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2x\}$ y aplicando las fórmulas del cálculo del área, momento con respecto a x y y , se obtiene,

$$A(x) = \int_0^{2x} (6x + 6y + 6) dy = \left(6xy + \frac{6y^2}{2} + 6y \right) \Big|_0^{2x} = 21x^2 + 12x$$

Para determinar los límites de integración en x se incluyen todas las líneas verticales que cortan a D comenzando con $x = 0$ y terminando con $x = 1$. Por lo tanto,

$$M = \iint_R \rho(x, y) dA = \int_0^1 \int_0^{2x} (6x + 6y + 6) dy$$

$$M = \int_0^1 (24x^2 + 12x) dx = \frac{(8x^3 + 6x^2)}{1} \Big|_0^1 = 14 \text{ unid. masa}$$

Primer momento de la lámina con respecto al eje x y el eje y respectivamente,

$$M_x = \iint_R y\rho(x, y) dA = \int_0^1 \int_0^{2x} (6xy + 6y^2 + 6y) dy dx$$

$$M_x = \int_0^1 \frac{(3xy^2 + 2y^3 + 3y^2)}{1} \Big|_0^{2x} dx = \int_0^1 (28x^3 + 12x^2) dx = \frac{28x^4}{4} + \frac{12x^3}{3} \Big|_0^1 = 11$$

$$M_y = \iint_R x\rho(x, y) dA = \int_0^1 \int_0^{2x} (6x^2 + 6xy + 6x) dy dx$$

$$M_y = \int_0^1 \left(6x^2y + \frac{6xy^2}{2} + 6xy \right) \Big|_0^{2x} dx = \int_0^1 (24x^3 + 12x^2) dx = \frac{24x^4}{4} + \frac{12x^3}{3} \Big|_0^1 = 10$$

Finalmente, las coordenadas del centro de gravedad o centro de masa son:

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{\iint_R x\rho(x, y) dA}{\iint_R \rho(x, y) dA} = \frac{10}{14} = \frac{5}{7}, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{\iint_R y\rho(x, y) dA}{\iint_R \rho(x, y) dA} = \frac{11}{14}$$

En otras palabras, la placa triangular se equilibra en el punto $C(5/7, 11/14)$.

Ejemplo 4.40. Encuentre el centroide de la región semicircular en el plano xy delimitado por el eje x y la curva $y = \sqrt{a^2 - x^2}$

Solución. Por simetría, $\bar{x} = 0$ (semicírculo) ya que el eje y es obviamente una línea de equilibrio.

$$\bar{y} = \frac{1}{\text{Area de R}} \iint_R y dA = \frac{2}{\pi a^2} \iint_R y dA$$

$$\bar{y} = \frac{2}{\pi a^2} \int_0^\pi \int_0^a (a^2 - x^2)^{1/2} dy dx = \frac{2}{\pi a^2} \int_0^\pi \int_0^a (r \operatorname{sen} \theta) r dr d\theta$$

$$\bar{y} = \frac{2}{\pi a^2} \int_0^\pi \left(\frac{1}{3} r^3 \operatorname{sen} \theta \right) \Big|_0^a d\theta = \frac{2a}{3\pi} \int_0^\pi \operatorname{sen} \theta d\theta = \frac{4a}{3\pi}$$

Luego, el punto de equilibrio es $C(0, 4a/3\pi)$

- **Centro de gravedad y centroide de un sólido**

Para un sólido tridimensional E , las fórmulas para momentos, centro de gravedad y centroide son similares a las de las láminas. Si E es homogéneo, entonces su densidad se define como su masa por unidad de volumen. Así, si E es un sólido homogéneo de masa M y volumen V , entonces su densidad ρ viene dada por $\rho = M/V$. Si E no es homogéneo y está en un sistema de coordenadas xyz , entonces su densidad en un punto general (x, y, z) está especificada por una función de densidad $\rho(x, y, z)$ cuyo valor en un punto puede verse como un límite:

$$\rho(x, y, z) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta M}{\Delta V}$$

donde ΔM y ΔV representan la masa y el volumen de un paralelepípedo rectangular, centrado en (x, y, z) , cuyas dimensiones tienden a cero.

De manera similar al caso de placas, se puede demostrar que la masa M de un sólido con una función de densidad continua $\rho(x, y, z)$ están dadas por,

Centro de gravedad $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ de un sólido E Centroide $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ de un sólido E

$$\bar{x} = \frac{1}{M} M_{yz} = \frac{1}{M} \iiint_E x \rho(x, y, z) dV \qquad \bar{x} = \frac{1}{V} \iiint_E x dV$$

$$\bar{y} = \frac{1}{M} M_{xz} = \frac{1}{M} \iiint_E y \rho(x, y, z) dV \qquad \bar{y} = \frac{1}{V} \iiint_E y dV$$

$$\bar{z} = \frac{1}{M} M_{xy} = \frac{1}{M} \iiint_E z \rho(x, y, z) dV \qquad \bar{z} = \frac{1}{V} \iiint_E z dV$$

Se observa que en las tres fórmulas para el centro de gravedad el denominador es la masa M del sólido. El numerador en la fórmula para \bar{x} se denota por M_{yz} y se denomina primer momento del sólido con respecto al plano yz ; el numerador de la fórmula para \bar{y} se denota por M_{xz} y se denomina primer momento del sólido con respecto al plano xz ; y el numerador de la fórmula para \bar{z} se denota por M_{xy} se denomina primer momento del sólido con respecto al plano xy .

Ejemplo 4.41. Encuentre la masa y el centro de gravedad (o centro de masa) de un sólido cilíndrico de altura h y radio a , suponiendo que la densidad en cada punto es proporcional a la distancia entre el punto y la base del sólido.

Solución. Dado que la densidad es proporcional a la distancia z desde la base, la función de densidad tiene la forma $\rho(x, y, z) = \kappa z$, donde κ es una constante de proporcionalidad positiva (desconocida), por lo que, la masa del sólido está dada por,

$$M = \iiint_E \rho(x, y, z) dV = \int_{-a}^a \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} \int_0^h \kappa z dz dy dx$$

$$M = \frac{1}{2} \kappa h^2 \int_{-a}^a \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} dy dx = \kappa h^2 \int_{-a}^a \sqrt{a^2-x^2} dx = \frac{1}{2} \pi \kappa h^2 a^2$$

Luego, se procede a determinar el centro de gravedad (el valor de κ se simplifica)

$$\bar{z} = \frac{1}{M} M_{xy} = \frac{1}{M} \iiint_E z \rho(x, y, z) dV = \frac{1}{\frac{1}{2} \pi \kappa h^2 a^2} \iiint_E z dV$$

$$\bar{z} = \frac{2}{\pi \kappa h^2 a^2} \int_{-a}^a \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} \int_0^h z(\kappa z) dz dy dx = \frac{2}{\pi h^2 a^2} \int_{-a}^a \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} \frac{1}{3} h^3 dy dx$$

$$\bar{z} = \frac{2h^3}{3\pi h^2 a^2} \int_{-a}^a 2\sqrt{a^2-x^2} dx = \frac{2h^3}{3\pi h^2 a^2} \left(a^2 \operatorname{sen}^{-1} \frac{x}{a} + x\sqrt{a^2-x^2} \right) \Big|_{-a}^a$$

$$\bar{z} = \frac{2h^3}{3\pi h^2 a^2} (\pi a^2) = \frac{2h}{3}$$

Por tanto, el centro de gravedad (o el centro de masa) es $C(0,0, 2h/3)$

Ejemplo 4.42. Considere que la densidad de un objeto está dada por xz , y el objeto ocupa el tetraedro con esquinas $(0,0,0)$, $(0,1,0)$, $(1,1,0)$ y $(0,1,1)$. Encuentra la masa y el centro de masa del objeto.

Solución. De las ecuaciones respectivas se tiene que la integral de la densidad sobre la región corresponde a,

$$M = \iiint_E xz \, dV = \int_0^1 \int_x^1 \int_0^{y-x} xz \, dz \, dy \, dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \int_x^1 x(y-x)^2 \, dy \, dx$$

$$M = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x(1-x)^3}{3} \, dx = \frac{1}{6} \int_0^1 (x - 3x^2 + 3x^3 - x^4) \, dx = \frac{1}{120}$$

Luego se calculan los momentos como en el problema anterior, con lo cual se obtiene,

$$M_{xy} = \int_0^1 \int_x^1 \int_0^{y-x} xz^2 \, dz \, dy \, dx = \frac{1}{3} \int_0^1 \int_x^1 x(y-x)^3 \, dy \, dx$$

$$M_{xy} = \frac{1}{3} \int_0^1 \frac{x(1-x)^4}{4} \, dx = \frac{1}{12} \int_0^1 x(1-x^4) \, dx = \frac{1}{360}$$

$$M_{xz} = \int_0^1 \int_x^1 \int_0^{y-x} xyz \, dz \, dy \, dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \int_x^1 xy(y-x)^2 \, dy \, dx$$

$$M_{xz} = -\frac{1}{24} \int_0^1 x(x+3)(-1+x)^3 \, dx = \frac{1}{144}$$

$$M_{yz} = \int_0^1 \int_x^1 \int_0^{y-x} x^2 z \, dz \, dy \, dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \int_x^1 x^2 (y-x)^3 \, dy \, dx$$

$$M_{yz} = \int_0^1 \left(\frac{x^2}{6} - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{2} - \frac{x^5}{2} \right) \, dx = \frac{1}{6} \int_0^1 (x^2 - 3x^3 + x^4 - 3x^5) \, dx = \frac{1}{360}$$

Finalmente, las coordenadas del centro de masa son,

$$\bar{x} = \frac{1}{M} M_{yz} = \frac{1/360}{1/120} = \frac{1}{3}, \quad \bar{y} = \frac{1}{M} M_{xz} = \frac{1/360}{1/144} = \frac{2}{5}, \quad \bar{z} = \frac{1}{M} M_{xy} = \frac{1/360}{1/120} = \frac{1}{3}$$

Por tanto, el centro de gravedad (o el centro de masa) es $C(1/3, 2/5, 1/3)$

4.6. Cambio de variables en integrales múltiples

De cursos previos en cálculo integral, la regla de sustitución se puede realizar lo siguiente,

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_c^d f(u)du, \text{ donde } u = g(x)$$

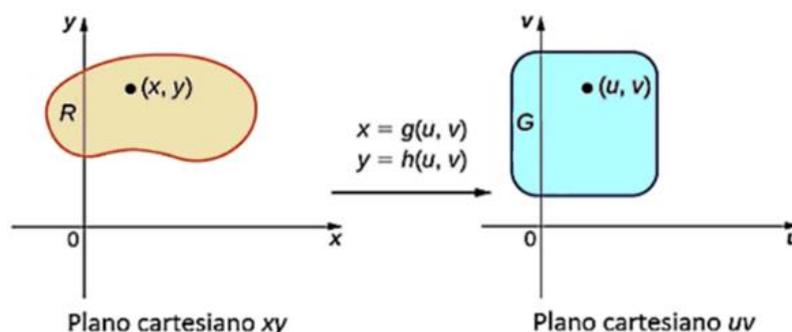
En esencia, esto consiste en tomar una integral en términos de x y cambiarla a términos de u , lo cual puede ser extendido al caso de integrales dobles y triples, siendo un caso cuando se convierten integrales dobles a coordenadas polares y cuando se convierten integrales triples a coordenadas cilíndricas o esféricas, entre otros casos.

Si bien a menudo la razón para cambiar las variables es obtener una integral más simple con las nuevas variables, y cuando se convierte de coordenadas cartesianas a polares, cilíndricas o esféricas se pretende que este cambio permita de manera fácil determinar los nuevos límites en función de la región dada, y con ello reducir la complejidad de resolver el problema.

Transformaciones planas. Una transformación plana es una función que transforma una región en un plano en una región R en otro plano mediante un cambio de variables. Tanto como son subconjuntos de \mathbb{R}^2 . En la Figura 75 se muestra una región G en el plano uv transformada en una región R en el plano xy por el cambio de variables $x = g(u, v)$, $y = h(u, v)$. Normalmente se considera que cada una de estas funciones tiene primeras derivadas parciales continuas, lo que significa que g_u, g_v, h_u y h_v existen y también son continuas.

Figura 75

La transformación de una región G en el plano uv en una región R en el plano xy



Nota: Autor (2024)

Ejemplo 4.43. Determinar la nueva región que se obtiene al aplicar la transformación dada a la región R.

- Si R es la elipse $x^2 + y^2/36 = 1$ y la transformación es $x = u/2, y = 3v$
- Si R es región acotada por las rectas $y = x + 1, y = -x + 4, y = x/3 - 4/3$ y la transformación es $x = (u + v)/2, y = (u - v)/2$

Solución. a. Sea R la elipse $x^2 + y^2/36 = 1$, y $x = u/2, y = 3v$, sustituyendo, se obtiene,

$$\left(\frac{u}{2}\right)^2 + \left(\frac{3v}{6}\right)^2 = 1 \rightarrow \frac{u}{4} + \frac{9v^2}{36} = 1, \text{ finalmente, } u^2 + v^2 = 4$$

Se concluye que la transformación permitió el paso de elipse a una circunferencia de radio 2.

b. Sea R la región acotada por las rectas $y = x + 1, y = -x + 4, y = x/3 - 4/3$ y la transformación es $x = (u + v)/2, y = (u - v)/2$

Al igual que en la primera parte este ejercicio, se introduce la transformación en la ecuación, sin embargo, en este caso se necesita hacerlo tres veces, una para cada ecuación, y, con el fin de apreciar mejor el problema se dibuja la gráfica de la región, obteniéndose un triángulo, que, al aplicar la transformación a cada borde del triángulo, o sea, sea $y = -x + 4$, luego la transformación da,

$$\frac{1}{2}(u - v) = -\frac{1}{2}(u + v) + 4 \rightarrow u - v = -u - v + 8 \rightarrow u = 4$$

Para el caso de la transformación de $y = x + 1$

$$\frac{1}{2}(u - v) = \frac{1}{2}(u + v) + 1 \rightarrow u - v = u + v + 2 \rightarrow v = -1$$

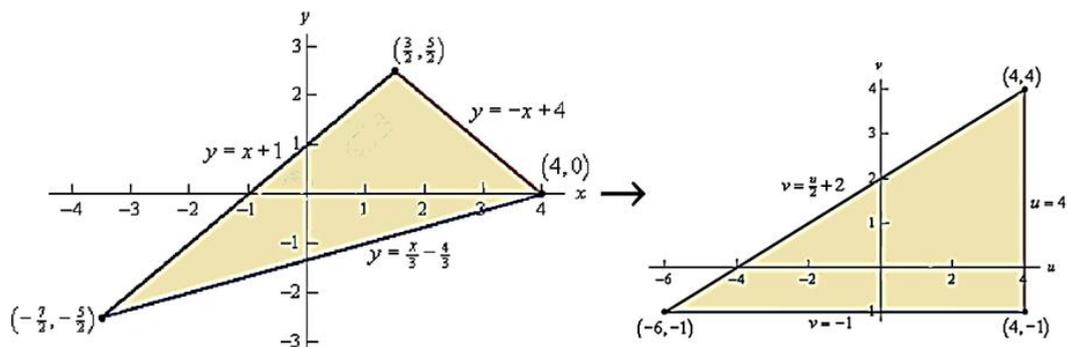
Finalmente, sea la transformación $y = x/3 - 4/3$, se obtiene,

$$\frac{1}{2}(u - v) = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}(u + v)\right] - \frac{4}{3} \rightarrow 3u - 3v = u + v - 8 \rightarrow v = 2 + \frac{u}{2}$$

En resumen, la gráfica siguiente muestra la transformación aplicada (rotación del triángulo)

Figura 76

Área mediante transformación de coordenadas



Nota: Autor (2024)

Para cambiar variables en una integral doble se hace necesario conocer de la matriz jacobiana de la transformación, cuya definición es la siguiente:

La matriz jacobiana de la transformación $x = g(u, v)$, $y = h(u, v)$ está dada por:

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

Para el caso de integral doble, el cambio de variables implica el uso de la siguiente expresión

$$\iint_R f(x, y) dA = \iint_R f(g(u, v), h(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| d\bar{A}$$

Donde $d\bar{A}$ es el diferencial en términos de u y v .

Ejemplo 4.44. Evaluar $\iint_R (x + y) dA$ donde R es la región trapezoidal con vértices dados por $(0,0)$, $(5,0)$, $(5/2, 5/2)$, $(5/2, -5/2)$ usando la transformación $x = 2u + 3v$, $y = 2u - 3v$.

Solución. A partir de la gráfica, las ecuaciones para cada uno de los lados, permite establecer la región de trabajo, por lo que, aplicando la transformación, se obtiene,

$y = x$, en $x = 2u + 3v$, $y = 2u - 3v$, se tiene: $2u - 3v = 2u + 3v$, $v = 0$

$y = -x$, en $x = 2u + 3v, y = 2u - 3v$, se tiene: $2u - 3v = -(2u + 3v), u = 0$

$y = 5 - x$, en $x = 2u + 3v, y = 2u - 3v$, se tiene: $2u - 3v = -(2u + 3v) + 5, u = 5/4$

$y = x - 5$, en $x = 2u + 3v, y = 2u - 3v$, se tiene: $2u - 3v = 2u + 3v - 5, v = 5/6$

La región S es entonces un rectángulo cuyos lados están dados por $u = 0, v = 0, u = 5/4, v = 5/6$ por lo tanto los rangos de u y v son, $0 \leq u \leq 5/4, 0 \leq v \leq 5/6$.

Cuyo matriz jacobiana corresponde a,

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial(2u + 3v)}{\partial u} & \frac{\partial(2u + 3v)}{\partial v} \\ \frac{\partial(2u - 3v)}{\partial u} & \frac{\partial(2u - 3v)}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -6 - 6 = -12$$

Luego, la integral es,

$$\iint_R (x + y) dA = \int_0^{5/6} \int_x^{5/4} [(2u + 3v) + (2u - 3v)] |-12| dA = \int_0^{5/6} \int_x^{5/4} 48u dA$$

$$\int_0^{5/6} \frac{24u^2}{1} \Big|_0^{5/4} dv = \frac{75}{2} \int_0^{5/6} dv = \frac{75}{2} v \Big|_0^{5/6} = \frac{125}{4}$$

Ejemplo 4.45. Evaluar $\iint_R xy dA$ donde R es la región limitada por las rectas $y = 2x, y = 2x - 2, y = x, y = x + 1$ usando la transformación $u = y - x, v = y - 2x$.

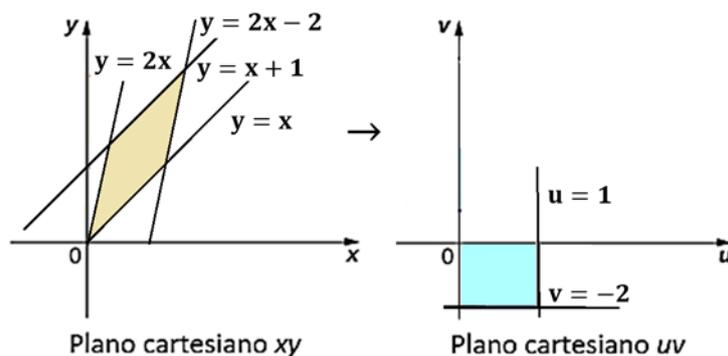
Solución. La gráfica de las ecuaciones de las rectas genera un polígono (ver figura), por lo que, aplicando la transformación, se obtiene, $u = y - x \rightarrow y = u + x$, a su vez, $v = y - 2x$

O sea, $v = u - x$ por tanto, $x = u - v, y = 2u - v$, cuya matriz jacobiana corresponde a,

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial(u - v)}{\partial u} & \frac{\partial(2u - v)}{\partial v} \\ \frac{\partial(2u - v)}{\partial u} & \frac{\partial(2u - v)}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 2 = 1$$

Figura 77

Área de región por transformación



Nota: Autor (2024)

Estos nos permite definir los límites de integración: $u \in [0,1], v \in [-2,0]$, luego se tiene,

$$\iint_R xy \, dA = \int_0^1 \int_{-2}^0 [(u - v)(2u - v)] \, dv \, du = \int_0^1 \left[\int_{-2}^0 (2u^2 - uv - 2uv + v^2) \, dv \right] \, du$$

$$\int_0^1 \left[\int_{-2}^0 (2u^2 - 3uv + v^2) \, dv \right] \, du = \int_0^1 2u^2v - \frac{3}{2}uv^2 + \frac{v^3}{3} \Big|_{-2}^0 \, du$$

$$\int_0^1 \left(4u^2 + 6u + \frac{8}{3} \right) \, du = \left(\frac{4u^3}{3} + 3u^2 + \frac{8}{3}u \right) \Big|_0^1 = 7$$

4.6.1. Cambio de variables para integrales triples

De manera similar al cambio de variables en integrales dobles, en las integrales triples funciona exactamente de la misma manera. Las sustituciones de coordenadas cilíndricas y esféricas son casos especiales de este método, para lo cual, si se considera una región G del espacio uvw mediante una transformación C^1 uno a uno $T(u, v, w) = (x, y, z)$ donde $x = g(u, v, w), y = h(u, v, w), z = k(u, v, w)$, entonces, cualquier función $F(x, y, z)$ definida en D puede considerarse como otra función $H(u, v, w)$ que está definida en G :

$$F(x, y, z) = F(g(u, v, w), h(u, v, w), k(u, v, w)) = H(u, v, w)$$

Para el cual la matriz jacobiana para tres variables corresponde a,

$$J_f(x, y, z) = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, el valor de una integral triple mediante cambio de variables se obtiene de,

$$\iiint_R F(x, y, z) dV = \iiint_G F(g(u, v, w), h(u, v, w), k(u, v, w)) \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| dudvdw$$

Ejemplo 4.46. Evaluar la integral triple

$$\int_0^3 \int_0^4 \int_{y/2}^{1+y/2} \left(x + \frac{z}{3}\right) dx dy dz$$

en el espacio usando la transformación $xyz: u = (2x - y)/2, v = y/2, w = z/3$

Solución. La región G en el espacio xyz sobre el cual tenemos que realizar la integración puede ayudar a identificar la región D en el espacio uvw. Dado que el espacio G está acotado por los planos $x = y/2, x = (y/2) + 1, y = 0, y = 4, z = 0, yz = 4$, y empleando para las transformaciones $u = (2x - y)/2, v = (y/2)$ y $w = z/3$, se puede hallar las superficies correspondientes para la región G y los límites de integración en el espacio uvw. Por conveniencia se debe presentar esta información como se detalla a continuación,

Tabla 2

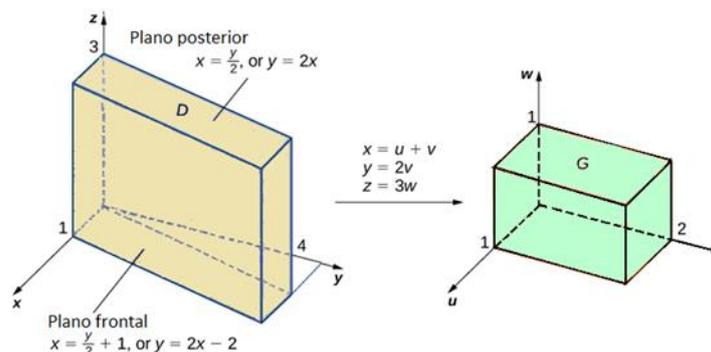
Información sobre las ecuaciones para las regiones D y G

Ecuaciones en xyz para la región D	Ecuaciones en uvw para la región G	Límites para integración en uvw
$x=y/2$	$u+v=v$	$u=0$
$x=(y/2)+1$	$u+v=1+v$	$u=1$
$y=0$	$v=0$	$v=0$
$y=4$	$v=2$	$v=2$
$z=0$	$w=0$	$w=0$
$z=4$	$w=3$	$w=1$

Nota: Autor (2024)

Figura 78

Volumen mediante transformación de coordenadas



Nota: Autor (2024)

Lo cual se resume en los siguientes planos: $x = u + v, y = 2v, z = 3w$

Aplicando el determinante a la matriz jacobiana, se obtiene:

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial(u+v)}{\partial u} & \frac{\partial(u+v)}{\partial v} & \frac{\partial(u+v)}{\partial w} \\ \frac{\partial(2v)}{\partial u} & \frac{\partial(2v)}{\partial v} & \frac{\partial(2v)}{\partial w} \\ \frac{\partial(3w)}{\partial u} & \frac{\partial(3w)}{\partial v} & \frac{\partial(3w)}{\partial w} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = (1)(2)(3) = 6$$

Además, la función a integrar corresponde a: $f(x, y, z) = x + \frac{z}{3} = u + v + w$

Escribiendo todos los elementos en la expresión de la integral triple, se obtiene,

$$\int_0^3 \int_0^4 \int_{y/2}^{1+y/2} \left(x + \frac{z}{3}\right) dx dy dz = \int_0^1 \int_0^2 \int_0^1 (u + v + w) |6| du dv dw$$

$$6 \int_0^1 \int_0^2 \left(\frac{u^2}{2} + uv + uw\right) \Big|_0^1 dv dw = 6 \int_0^2 \int_0^1 \left(\frac{1}{2} + v + w\right) dv dw$$

$$6 \int_0^1 \left(\frac{1}{2}v + \frac{v^2}{2} + vw\right) \Big|_0^2 dw = 6 \int_0^1 (3 + 2w) dw = 6 \frac{(3w + w^2)}{1} \Big|_0^1 = 24$$

Ejemplo 4.47. Calcular el volumen de la región W del primer octante ($x > 0, y > 0, z > 0$) limitada por los paraboloides $z = x^2 + y^2, z = 2x^2 + 2y^2$, por los cilindros $xy = 1, xy = 4$, y por los planos $x = y, y = 5x$

Solución. El volumen viene dado por la expresión, $V = \iiint_R dx dy dz$

La integral será más simple en resolver si se considera el cambio $u = xy, v = y/x, w = z/(x^2 + y^2)$, con este cambio, R se convierte en la región definida por los límites,

$$1 \leq u \leq 4, 1 \leq v \leq 5, 1 \leq w \leq 2$$

La matriz Jacobiana de esta transformación corresponde a,

$$\begin{aligned} \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial\sqrt{u/v}}{\partial u} & \frac{\partial\sqrt{u/v}}{\partial v} & \frac{\partial\sqrt{u/v}}{\partial w} \\ \frac{\partial\sqrt{uv}}{\partial u} & \frac{\partial\sqrt{uv}}{\partial v} & \frac{\partial\sqrt{uv}}{\partial w} \\ \frac{\partial w(u/v + uv)}{\partial u} & \frac{\partial w(u/v + uv)}{\partial v} & \frac{\partial w(u/v + uv)}{\partial w} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \frac{1/v}{2\sqrt{u/v}} & \frac{-u/v^2}{2\sqrt{u/v}} & 0 \\ \frac{v}{2\sqrt{uv}} & \frac{u}{2\sqrt{uv}} & 0 \\ \frac{w(1+v^2)}{v} & \frac{uw(v^2-1)}{v^2} & \frac{u(1+v^2)}{v} \end{vmatrix} = \frac{u(1+v^2)}{2v^2} \end{aligned}$$

Escribiendo todos los elementos en la expresión de la integral triple, se obtiene,

$$\int_1^4 \int_1^5 \int_1^2 \left(\frac{u(1+v^2)}{2v^2} \right) dw dv du = \int_1^4 \int_1^5 \frac{uw(1+v^2)}{2v^2} \Big|_0^1 dv du$$

$$\int_1^4 \frac{u}{2} \int_1^5 \left(\frac{1}{v^2} + 1 \right) dv du = \int_1^4 \frac{u}{2} \left(-\frac{1}{v} + v \right) \Big|_0^5 du$$

$$\frac{24}{5} \int_1^4 \frac{u}{2} du = \frac{12}{5} \left(\frac{u^2}{2} \right) = \frac{12}{5} \left(\frac{u^2}{2} \right) \Big|_0^4 = \frac{12}{5} \left(8 - \frac{1}{2} \right) = 18$$

4.7. Problemas propuestos

- **Integrales dobles sobre regiones planas**

1. Evaluar $\int_0^3 \int_0^2 xy(x+y) dy dx$. Sol. 24
2. Evaluar $\int_{-1}^1 \int_{-2}^2 (2x^2 + y^2) dy dx$. Sol. 16
3. Evaluar $\int_0^1 \int_0^{1-x} (x^2 + y^2) dy dx$. Sol. 1/6

4. Evaluar $\int_1^2 \int_x^{2x} \frac{1}{x^2+y^2} dydx$. Sol. $\ln 2 \tan^{-1} \left(\frac{1}{3} \right)$
5. Evaluar $\int_1^2 \int_0^{\ln x} (x-1)\sqrt{1+e^{2y}} dydx$. Sol. $\frac{1}{6}(5\sqrt{5} - 2\sqrt{2})$
6. Evaluar $\iint_R (12x - 18y)dA$ sobre la región $R = [-1,4] \times [2,3]$. Sol. -135
7. Evaluar $\iint_R (6y\sqrt{x} - 2y^3) dA$ sobre la región $R = [1,4] \times [0,3]$. Sol. 9/2
8. Evaluar $\iint_R (6y\sqrt{x} - 2y^3) dA$ sobre la región $R = [1,4] \times [0,3]$. Sol. 9/2
9. Evaluar $\iint_R (e^x/2y - (4x-1)/y^2) dA$ sobre la región $R = [-1,0] \times [1,2]$. Sol. 1.72
10. Evaluar $\iint_R (\text{sen}(2x) - 1/(1+6y)) dA$ sobre la región $R = [\pi/4, \pi/2] \times [0,1]$. Sol. 0.25
11. Evaluar $\iint_R ye^{y^2-4x} dA$ sobre la región $R = [0,2] \times [0,2\sqrt{2}]$. Sol. 372.37
12. Evaluar $\iint_R (x+y) dA$ sobre el triángulo de vértices (0,0), (1,0) y (0,1). Sol. 1/3
13. Evaluar $\iint_R x^2 + y^2 dA$ sobre el triángulo de vértices (0,0), (2,0) y (1,1). Sol. 4/3
14. Evaluar $\iint_R \text{sen } 0.5\pi(x+y) dA$ sobre el triángulo de vértices (0,0), (2,1) y (1,2). Sol. $-8/(3\pi^2)$
15. Evaluar $\iint_R xy/(1+y^4)^{1/2} dA$ sobre el triángulo de vértices (0,0), (0,1) y (1,1). Sol. $(\sqrt{2}-1)/4$

• **Integrales dobles sobre regiones generales**

1. Evaluar $\iint_D x + 2y dA$ donde D es la región acotada $y = 2x^2, y = 1 + x^2$, Sol. 32/15
2. Evaluar $\iint_D 2x^2y + 9y^3 dA$ donde D es la región acotada $y = 2\sqrt{x}, y = 2x/3$, Sol. 24057/5
3. Evaluar $\iint_D 10x^2y^3 - 6 dA$ donde D es la región acotada $x = -2y^2, x = y^3$, Sol. -8296/13
4. Evaluar $\iint_D x(y-1) dA$ donde D es la región acotada por $y = x^2 - 3, y = 1 - x^2$, Sol. 0

5. Evaluar $\iint_D 5x^3 \cos(y^3) dA$ donde D es la región acotada por $y = 2, y = x^2/4$, Sol. 0.60

6. Evaluar $\iint_D 42y^2 - 12x dA$ sobre $D = \{(x,y)/0 \leq x \leq 4, (x-2)^2 \geq y \leq 6\}$ Sol. 11136

7. Evaluar $\iint_D (x+2y)^{-1/2} dA$ sobre la región $x-2y \leq 1, x \geq y^2+1$. Sol. 2/3

• **Aplicaciones de los integrales dobles**

8. Calcular el volumen del sólido limitado por los planos coordenados y $2x + y + z = 6$. Sol. 18

9. Calcular el volumen de la región acotada por $z = 16 - x^2 - y^2$ y por la región $R = [0,2] \times [0,2]$. Sol. 160/3

10. Determinar el volumen del sólido que yace debajo del paraboloides $z = x^2 + y^2$ y encima por la región D en el plano xy acotada por las rectas $y = 2x$ y la parábola $y = 2x$. Sol. 216/35

11. Determinar el volumen del tetraedro acotado por los planos $x + 2y + z = 2$ y las rectas $x = 2y, x = 0, z = 0$. Sol. 1/3.

12. Determinar el volumen del prisma cuya base es el triángulo en el plano xy acotado por el eje x y las rectas $y = x$ y $x = 1$ y cuya parte superior está sobre el plano $z = 3 - x - y$. Sol. 1

13. Calcular el volumen del sólido limitado por $z = 4 - x^2 - y^2$ y el plano $z = 2$. Sol. $\sqrt{2}\pi$

• **Integrales dobles impropias**

1. Evaluar $\int_1^\infty \int_{e^{-x}}^1 \frac{1}{x^3 y} dy dx$. Sol. 1

2. Evaluar $\int_0^\infty \int_0^\infty x e^{-(x+2y)} dy dx$. Sol. $\frac{1}{2}$

3. Evaluar $\int_0^1 \int_0^\infty \frac{y}{1+x^2} dx dy$. Sol. $\frac{\pi}{4}$

4. Evaluar $\int_0^5 \int_0^\infty \frac{x^2}{1+y^2} dy dx$. Sol. $\frac{125\pi}{6}$

• **Integrales dobles en coordenadas polares**

1. Evaluar $\iint_D (x+y) dA$ donde D es la región acotada $0 \leq y \leq \sqrt{9-x^2}$ y $0 \leq x \leq 3$. Sol. 18

2. Evaluar $\iint_D 4xy - 7 dA$ donde D es la región en el primer cuadrante de la porción acotada por $x^2 + y^2 = 2$. Sol. $2 - 7\pi/2$

3. Evaluar $\iint_D y^2 + 3x \, dA$ donde D es la región en el primer cuadrante y acotada por $x^2 + y^2 = 1$ y $x^2 + y^2 = 9$. Sol. $26 - 5\pi$
4. Evaluar $\iint_D e^{x^2+y^2} \, dA$ donde D es la región semicircular de $y = \sqrt{1-x^2}$ y el eje x . Sol. $\pi/8$
5. Evaluar $\iint_D \sqrt{1+4x^2+4y^2} \, dA$ donde D es la región semicircular de $x^2 + y^2 = 16$ Sol. $\pi(65^{3/2} - 1)/12$

• **Integrales triples sobre regiones planas**

1. Evaluar $\int_0^1 \int_0^2 \int_1^3 x^2 y z \, dz dy dx$. Sol. $\frac{8}{3}$
2. Evaluar $\int_0^1 \int_0^2 \int_1^3 x^2 y z \, dz dy dx$. Sol. $\frac{8}{3}$
3. Evaluar $\int_0^2 \int_0^x \int_z^2 e^{x^3} y z \, dz dy dx$. Sol. $\frac{4}{3}(e^8 - 1)$
4. Evaluar $\int_0^2 \int_0^z \int_0^{xy} x y^2 z^2 \, dz dy dx$. Sol. $\frac{1}{198}$
5. Evaluar $\int_2^3 \int_{-1}^4 \int_1^0 x^2 y - z^3 \, dz dy dx$. Sol. $-\frac{755}{4}$
6. Evaluar $\int_{-1}^1 \int_0^z \int_{x-z}^{x+z} (x + y + z) \, dy dx dz$. Sol. 0
7. Evaluar $\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} (1 + x + y + z)^{-3} \, dz dy dx$. Sol. $\frac{1}{2} \ln 2 - \frac{5}{16}$
8. Evaluar $\int_0^1 \int_0^{z^2} \int_0^3 y \cos(z^5) \, dx dy dz$. Sol. $\frac{3}{10} \text{sen}(1)$
9. Evaluar $\int_0^1 \int_0^1 \int_0^{x+y} 2x + y - 1 \, dz dy dx$. Sol. $11/24$
10. Evaluar $\int_0^1 \int_0^x \int_0^{\ln y} e^{x+y+z} \, dz dy dx$. Sol. $-3e^2/4 + 2e - 3/4$
11. Evaluar $\int_0^{\pi/2} \int_0^{\text{sen } \theta} \int_0^{r \cos \theta} r^2 \, dz dr d\theta$. Sol. $1/20$
12. Evaluar $\int_0^1 \int_0^{y^2} \int_0^{x+y} x \, dz dx dy$. Sol. $11/84$
13. Evaluar $\int_0^\pi \int_0^{\pi/2} \int_0^1 z \text{sen } x + z \cos y \, dz dy dx$. Sol. π

• **Integrales triples como volumen**

1. Utilizar una integral triple para encontrar el volumen del sólido dentro del cilindro $x^2 + z^2 = 9$ y entre los planos $z = 1$ y $x + z = 5$. Sol. 36π
2. Encontrar el volumen del sólido encerrado entre los paraboloides $z = 5x^2 + 5y^2$ y $z = 6 - 7x^2 - y^2$. Sol. $3\pi/\sqrt{2}$
3. Calcular el volumen del sólido encerrado por el cilindro $x^2 + y^2 = 4$ y los planos $z = 0$, $z = 4$. Sol. 16π

4. Determinar el volumen del sólido limitado por el cilindro $x^2 + y^2 = 1$ y los planos $z = 0, z + x = 2$. Sol. 2π
5. Calcular el volumen comprendido entre las superficies $z = 2 - x^2 - y^2$ y $z = \frac{1}{2}$. Sol. $9\pi/8$
6. Determinar el volumen del sólido limitado por el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2$. Sol. $\frac{\pi(8\sqrt{2}-7)}{6}$
7. Calcular el volumen del sólido limitado por el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y el cono $2 - z = \sqrt{x^2 + y^2}$. Sol. $5\pi/6$

• **Integrales triples sobre una región acotada general**

8. Evaluar $\iiint_E 5x - 3y \, dV$ donde E es la región acotada por $x = y = z = 0, x + y + z = 1$ Sol. $1/12$
9. Evaluar $\iiint_E (1 - x) \, dV$ donde E, región del primer octante en el plano $3x + 2y + z = 6$ Sol. 3
10. Evaluar $\iiint_E x + y + z \, dV$ sobre la región $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$, primer octante. Sol. $3\pi/16$

• **Integrales triples en coordenadas cilíndricas y esféricas**

1. Evaluar $\iiint_R (x^2 + y^2) \, dV$ sobre la región R: $\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1$. Sol. $\pi/10$
2. Evaluar $\iiint_R x^2 \, dV$ sobre la región R: $0 \leq z \leq 9 - x^2 - y^2$. Sol. $243\pi/4$
3. Evaluar $\iiint_R (x^2 + y^2) \, dV$ sobre la región R: $\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1$. Sol. $\pi/10$
4. Evaluar $\iiint_R \sqrt{x^2 + y^2} \, dV$ sobre la región R: $0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq \sqrt{9 - x^2}, 0 \leq z \leq 3$. Sol. 18π
5. Evaluar $\iiint_R (x^2 + y^2 + z^2) \, dV$ sobre la región R: $-\sqrt{4 - x^2 - y^2} \leq z \leq 0$. Sol. $64\pi/5$
6. Evaluar $\iiint_R z^2 \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \, dV$ sobre la región R: $0 \leq z \leq \sqrt{4 - x^2 - y^2}, x \geq 0, y \geq x$. Sol. $8\pi/9$
7. Evaluar $\iiint_R z \, dV$ sobre la región R: $x^2 + y^2 \leq z^2, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z > 0$. Sol. $\pi/8$
8. Evaluar $\iiint_R x \, dV$ sobre el octante positivo de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$. Sol. $\pi a^4/16$

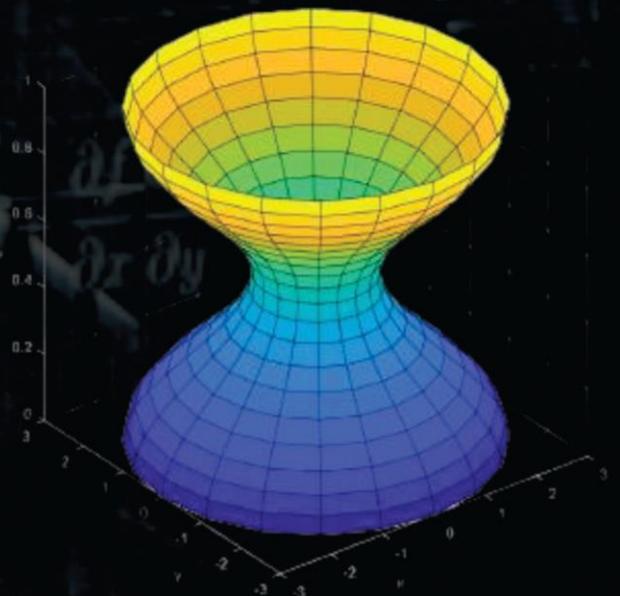
• **Centroide y momento de inercia**

1. Encontrar el volumen y las coordenadas del centroide del tetraedro definido por $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ y $x + y + z \leq 1$. Sol. $V = 1/6, \bar{x} = \bar{y} = \bar{z} = 1/4$
2. Hallar la masa del cuerpo limitado por el paraboloido $x^2 + y^2 = 2z$ y la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ ($z > 0$), $\rho = x^2 + y^2 + z^2$. Sol. $M = \pi(18\sqrt{3} - 97/6)/5$
3. Hallar la masa del cuerpo limitado por las esferas $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ y la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ ($z > 0$), $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Sol. $M = 65\pi$
4. Calcular las coordenadas del centroide del cuerpo limitado por las superficies $z = x^2 + y^2, x + y = 1, x = y = z = 0, (\rho = k)$. Sol. $C(2/5, 2/5, 7/30)$
5. Calcular la masa y el centro de masa del sólido S limitado por el paraboloido $z = 4x^2 + 4y^2, z = 1, (\rho = k)$. Sol. $M = \pi k/8, C(0,0,2)$
6. Calcular la masa del sólido S limitado por las esferas $x^2 + y^2 + z^2 = 4, x^2 + y^2 + z^2 = 9$, si la densidad voluminosa en cualquier punto es $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Sol. $M = 65\pi$

CAPITULO 05

Capítulo V: Integración vectorial

INTEGRACIÓN VECTORIAL



Integración vectorial

El estudio de estas herramientas matemáticas proporciona una base sólida para comprender y analizar fenómenos físicos complejos en diversas áreas del conocimiento, es decir, gracias al estudio de las integrales de línea, gradiente, divergencia y rotacional es posible comprender un amplio rango de aplicaciones en mecánica de fluidos, termodinámica, fenómenos eléctricos, entre otros, con lo cual se nos da la capacidad de integrar funciones multivariantes y campos vectoriales sobre curvas arbitrarias en un plano o en el espacio. Hay dos tipos de integrales de línea: integrales de línea escalares e integrales de línea vectoriales. Las integrales de línea escalares son integrales de una función escalar sobre una curva en un plano o en el espacio, mientras que, las integrales de líneas vectoriales son integrales de un campo vectorial sobre una curva en un plano o en el espacio.

El objetivo general del presente capítulo es comprender y aplicar las integrales de línea para calcular cantidades físicas y matemáticas importantes en el contexto de campos escalares y vectoriales de funciones multivariantes.

Prerrequisitos para abordar este tema

La base teórica necesaria para el estudio de este capítulo es la siguiente:

- Conocimiento de las diferentes técnicas para encontrar la derivada e integrales de funciones de variable real.
- Conocimiento de vectores, operaciones vectoriales (producto escalar, producto vectorial).
- Comprensión de matrices, determinantes, sistemas de ecuaciones lineales, espacios vectoriales, etc.
- Familiaridad con el flujo de fluidos, ecuaciones de Navier-Stokes, teorema de Bernoulli, entre otros principios o leyes.
- Habilidad para usar software como Matlab o Python para calcular integrales de línea, graficar campos vectoriales y superficies.

Se recomienda buscar información para iniciar y orientar los repasos antes de abordar cada tema.

5.1. Introducción

En cursos previos se analizó conceptos básicos sobre la integración de funciones de una variable evaluada con números reales, $f(x)$, con lo cual, la integral indefinida o antiderivada, denotada por: $\int f(x)dx$, corresponde al proceso de encontrar una función que, al derivarla, nos de la función original. Por otro lado, la integral de una función $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$ se define como el límite de una suma infinita de áreas de rectángulos, donde el ancho de cada rectángulo se aproxima a cero y la altura de cada rectángulo se aproxima al valor de la función en un punto dentro del intervalo, se denota por: $\int_a^b f(x)dx$

A continuación, se amplía esta temática con funciones de una variable evaluadas como vectores.

5.2. Integrales de funciones vectoriales

Sea $\mathbf{R}(t) = R_1(t)\mathbf{i} + R_2(t)\mathbf{j} + R_3(t)\mathbf{k}$ un vector que depende de una sola variable escalar, t , donde se supone que $R_1(t)$, $R_2(t)$ y $R_3(t)$ son continuas en un intervalo específico. Entonces,

$$\int \mathbf{R}(t)dt = \mathbf{i} \int R_1(t)dt + \mathbf{j} \int R_2(t)dt + \mathbf{k} \int R_3(t)dt$$

se denomina integral indefinida de $\mathbf{R}(t)$. Si existe un vector $\mathbf{S}(t)$ tal que, $\mathbf{R}(t) = \frac{d}{dt}(\mathbf{S}(t))$

Entonces, $\int \mathbf{R}(t)dt = \int \frac{d}{dt}(\mathbf{S}(t))dt = \mathbf{S}(t) + \mathbf{C}$

donde \mathbf{C} es un vector constante arbitrario que es independiente de t . En ese caso, la integral definida entre los límites $t = a$ y $t = b$ se escriben como sigue:

$$\int_a^b \mathbf{R}(t)dt = \int_a^b \frac{d}{dt}(\mathbf{S}(t))dt = [\mathbf{S}(t) + \mathbf{C}]_a^b = \mathbf{S}(b) - \mathbf{S}(a)$$

esta integral también puede definirse como el límite de una suma similar a una integral elemental.

Ejemplo 5.1. Sea el vector definido por $\mathbf{R}(t) = t^2\mathbf{i} + 2t^3\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$, se pide determinar,

- $\int \mathbf{R}(t)dt$
- $\int_1^2 \mathbf{R}(t)dt$

Solución

$$\begin{aligned} \text{a. } \int \mathbf{R}(t)dt &= \int [t^2\mathbf{i} + 2t^3\mathbf{j} - 5\mathbf{k}]dt = \mathbf{i} \int t^2dt + \mathbf{j} \int 2t^3dt + \mathbf{k} \int -5dt \\ &= \left(\frac{t^3}{3} + C_1\right)\mathbf{i} + \left(\frac{t^4}{2} + C_2\right)\mathbf{j} + (-5t + C_3)\mathbf{k} \\ &= \frac{t^3}{3}\mathbf{i} + \frac{t^4}{2}\mathbf{j} - 5t\mathbf{k} + \mathbf{C} \end{aligned}$$

donde \mathbf{C} es el vector constante dado por $C_1\mathbf{i} + C_2\mathbf{j} + C_3\mathbf{k}$

- Del apartado a, se tiene,

$$\begin{aligned} \int_1^2 \mathbf{R}(t)dt &= \frac{t^3}{3}\mathbf{i} + \frac{t^4}{2}\mathbf{j} - 5t\mathbf{k} + \mathbf{C} = \left[\frac{t^3}{3}\mathbf{i} + \frac{t^4}{2}\mathbf{j} - 5t\mathbf{k}\right]_1^2 \\ &= [(8/3)\mathbf{i} + 8\mathbf{j} - 10\mathbf{k}] - [(1/3)\mathbf{i} + (1/2)\mathbf{j} - 5\mathbf{k}] \\ &= (7/3)\mathbf{i} + (15/2)\mathbf{j} - 5\mathbf{k} \end{aligned}$$

Ejemplo 5.2. Evaluar la integral definida por $\int_0^1 \left(0, \frac{4}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right) dt$

Solución

Evaluando la integral de cada componente, se tiene,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{4}{1+t^2} dt &= [4 \arctan t]_0^1 = 4(\arctan 1 - \arctan 0) = 4 \arctan 1 = 4 \left(\frac{\pi}{4}\right) = \pi \\ \int_0^1 \frac{2t}{1+t^2} dt &= [\ln(1+t^2)]_0^1 = (\ln(2) - \ln(1)) = \ln(2) \end{aligned}$$

es decir, $\int_0^1 \left(0, \frac{4}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right) dt = (0, \pi, \ln 2) = 0\mathbf{i} + \pi\mathbf{j} + \ln 2 \mathbf{k}$

Ejemplo 5.3. La posición de una partícula que se mueve en el plano xy está dada por $\mathbf{a}(t) = 4\mathbf{i} + t\mathbf{j}$. Si la posición y velocidad inicial de la partícula es $\mathbf{r}(0) = 3\mathbf{i}$, $\mathbf{v}(0) = t\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$ donde \mathbf{r} está en metros t en segundos. Se pide determinar $\mathbf{r}(t)$ y $\mathbf{v}(t)$.

Solución

A partir de, $\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}(0) + \int \mathbf{a}(t)dt$, se obtiene que la velocidad corresponde a,

$$\mathbf{v}(t) = t\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + \int (4\mathbf{i} + t\mathbf{j})dt = 5t\mathbf{i} + \left(5 + \frac{t^2}{2}\right)\mathbf{j}$$

$$\mathbf{r}(t) = 3\mathbf{i} + \int \left[5t\mathbf{i} + \left(5 + \frac{t^2}{2}\right)\mathbf{j}\right] dt = \left(3 + \frac{5t^2}{2}\right)\mathbf{i} + \left(5t + \frac{t^3}{6}\right)\mathbf{j}$$

Ejemplo 5.4. Cierta partícula se mueve en el plano xy con una aceleración definida por la ecuación está dad $\mathbf{r}(t)$ sabiendo que su velocidad está dada por:

$\mathbf{v}(t) = \sin t \mathbf{i} - \cos t \mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$, y la posición inicial de la partícula es $\mathbf{r}(0) = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$

Solución

Empleando la definición del vector velocidad, se tiene,

$$= -\cos t \mathbf{i} - \sin t \mathbf{j} + \frac{t^3}{3}\mathbf{k} + \mathbf{C}, \text{ donde } \mathbf{C} \text{ se calcula a partir de la condición inicial, o sea, } \mathbf{r}(0) = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k} = -\mathbf{i} + \mathbf{C}, \text{ por tanto, } \mathbf{C} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}, \text{ finalmente se obtiene,}$$

$$\mathbf{r}(t) = (2 - \cos t)\mathbf{i} + (1 - \sin t)\mathbf{j} + \left(1 - \frac{t^3}{3}\right)\mathbf{k}$$

5.2.1. Integrales de línea

La integral de línea es una generalización de la integral de Riemann que se utiliza para calcular la suma de valores de una función sobre una curva parametrizada, y su aplicación va desde el cálculo de la longitud de una curva, del trabajo realizado por un campo vectorial, el flujo de un campo vectorial a través de una superficie, entre otras aplicaciones.

Para ello, suponga que $\mathbf{r}(u) = x(u)\mathbf{i} + y(u)\mathbf{j} + z(u)\mathbf{k}$ es el vector de posición de puntos $P(x, y, z)$ y que $\mathbf{r}(u)$ define una curva C que une los puntos P_1 y P_2 , donde $u = u_1$ y $u = u_2$, respectivamente, donde C está compuesta de un número finito de curvas para cada una de las cuales $\mathbf{r}(u)$ tiene una derivada continua, y que,

$\mathbf{A}(x, y, z) = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}$ corresponde a una función vectorial de posición definida y continua a lo largo de C , entonces, la integral de la componente tangencial de \mathbf{A} a lo largo de C de P_1 a P_2 se define como un ejemplo de integral de línea, es decir,

$$\int_{P_1}^{P_2} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_C A_1 dx + A_2 dy + A_3 dz$$

A continuación, se presentan los casos más simples de integrales de línea del campo \mathbf{F} .

- a. Si \mathbf{F} es un campo vectorial a lo largo de una curva C se define su integral de línea como:

$$\int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz$$

- b. Para el caso de una curva parametrizada $\mathbf{r}(t)$, entonces se puede calcular la integral de línea del campo \mathbf{F} como sigue: $\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} dt$

- c. Si el parámetro es la longitud de arco, la integral de línea se determina por: $\int_0^L \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds$

Ejemplo 5.5. Suponga que $\mathbf{F} = -3x^2\mathbf{i} + 5xy\mathbf{j}$ y sea C la curva $y = 2x^2$ en el plano xy , se pide determinar la integral de línea $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ desde $P_1(0, 0)$ a $P_2(1, 2)$

Solución

Como la integración se lleva a cabo en el plano $xy(z = 0)$, se toma $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$, entonces:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C (-3x^2\mathbf{i} + 5xy\mathbf{j}) \cdot (dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j}) = \int_C (-3x^2 dx + 5xy dy).$$

Primer método. Sea $x = t$ en $y = 2x^2$, entonces, las ecuaciones paramétricas de C son $x = t$, $y = 2t^2$, donde los puntos $P_1(0, 0)$ y $P_2(1, 2)$, permiten establecer a $t = 0$ y $t = 1$, respectivamente, por tanto:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{t=0}^1 [-3t^2 dt + 5t(2t^2)d(2t^2)] = \int_{t=0}^1 (-3t^2 + 40t^4) dt = [-t^3 + 8t^5]_0^1 = 7$$

Segundo método. Se reemplaza directamente, $y = 2x^2$, donde x va desde 0 a 1, luego,

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 [-3x^2 dx + 5x(2x^2)d(2x^2)] = \int_0^1 (-3x^2 + 40x^4) dx = [-x^3 + 8x^5]_0^1 = 7$$

Ejemplo 5.6. Calcular el trabajo realizado por el campo de una fuerza $\mathbf{F} = 2xy\mathbf{i} - y^2\mathbf{j}$ sobre un objeto que se mueve sobre la curva $y = x^2$ en el plano xy , en $0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 4$

Solución

A partir de la definición del trabajo en un plano xy , de $\mathbf{F} = 2xy\mathbf{i} - y^2\mathbf{j}$, se obtiene,

$$W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C (2xy\mathbf{i} - y^2\mathbf{j}) \cdot (dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j}) = \int_C (2xy dx - y^2 dy)$$

$$\text{Además, } y = x^2, W = \int_0^2 2x^3 dx - \int_0^4 y^2 dy = \left[\frac{x^4}{2}\right]_0^2 - \left[\frac{y^3}{3}\right]_0^4 = 8 - \frac{64}{3} = -\frac{40}{3}$$

Ejemplo 5.7. Calcular el trabajo realizado por el campo vectorial $\mathbf{F} = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ sobre la curva $\mathbf{r}(t) = \cos t\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j}$ con $0 \leq t \leq \pi$.

Solución

$$\text{Se halla, } \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(\cos t\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j}) = -\sin t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j}$$

Además, $x = \cos t, y = \sin t$, entonces el valor de \mathbf{F} sobre la curva corresponde a:

$$\mathbf{F} = -\sin t\mathbf{j} + \cos t\mathbf{k}$$

$$\text{y de, } \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = (-\sin t\mathbf{j} + \cos t\mathbf{k}) \cdot (-\sin t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j}) = \sin^2 t + \cos^2 t = 1$$

Al integrar la expresión resultante, se obtiene,

$$W = \int_0^\pi \left(\mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}\right) dt = \int_0^\pi dt = \pi$$

Ejemplo 5.8. Encuentre el trabajo realizado por $\mathbf{F} = (y - x^2)\mathbf{i} + (z - y^2)\mathbf{j} + (x - z^2)\mathbf{k}$ sobre la curva $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$ con $0 \leq t \leq 1$.

Solución

Sea $x = t, y = t^2, z = t^3$ entonces el valor de \mathbf{F} sobre la curva corresponde a:

$$\mathbf{F} = (t^2 - t^2)\mathbf{i} + (t^3 - t^4)\mathbf{j} + (t - t^6)\mathbf{k} = (t^3 - t^4)\mathbf{j} + (t - t^6)\mathbf{k}$$

y de la expresión, $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + 3t^2\mathbf{k}$, se obtiene,

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = [(t^3 - t^4)\mathbf{j} + (t - t^6)\mathbf{k}] \cdot [\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + 3t^2\mathbf{k}] = 2t^4 - 2t^5 + 3t^3 - 3t^8$$

Al integrar la expresión resultante, se obtiene,

$$\int_0^1 \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} dt = \int_0^1 (2t^4 - 2t^5 + 3t^3 - 3t^8) dt = \left[\frac{2t^5}{5} - \frac{t^6}{3} + \frac{3t^4}{4} - \frac{t^9}{9} \right]_0^1 = \frac{29}{60}$$

Ejemplo 5.9. Encuentre el trabajo realizado por $\mathbf{F} = xy\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + zx\mathbf{k}$ sobre la curva $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$ con $0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 4, 0 \leq z \leq 8$.

Solución

Sea $x = t, y = t^2, z = t^3$ y de los intervalos que definen al espacio de análisis, se tiene,

En $P_1(0, 0, 0)$ se tiene, $x(t_1) = t_1 = 0, y(t_1) = t_1^2 = 0^2, z(t_1) = t_1^3 = 0^3$, es decir, $t_1 = 0$

En $P_2(2, 4, 8)$ se tiene, $x(t_2) = t_2 = 2, y(t_2) = t_2^2 = 2^2 = 4, z(t_2) = t_2^3 = 2^3 = 8$, es decir, $t_2 = 2$.

Además, $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}) = \mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + 3t^2\mathbf{k}$, y de, $\mathbf{F} \cdot \mathbf{r}(t) = t^3\mathbf{i} + t^5\mathbf{j} + t^4\mathbf{k}$

$$(\mathbf{F} \cdot \mathbf{r}) \frac{d\mathbf{r}}{dt} = (t^3\mathbf{i} + t^5\mathbf{j} + t^4\mathbf{k}) \cdot (\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + 3t^2\mathbf{k}) = t^3 + 5t^6$$

$$\text{Luego, } W = \int_0^2 (t^3 + 5t^6) dt = \left[\frac{t^4}{4} + \frac{5t^7}{7} \right]_0^2 = \frac{2^4}{4} + \frac{5(2^7)}{7} = \frac{668}{7}$$

5.2.2. Campos conservativos

Un campo vectorial \mathbf{A} definido en un dominio abierto D del espacio euclídeo \mathbb{R}^n se llama conservativo si existe una función escalar ϕ de clase C^1 (es decir, con derivadas parciales continuas de primer orden) en D tal que $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \nabla\phi(\mathbf{x})$ para todo \mathbf{x} en D ; en otras palabras, un campo vectorial es conservativo si es el

gradiente de una función escalar. La función ϕ se llama función potencial del campo vectorial \mathbf{A} , para su análisis, se aplica el teorema siguiente:

Teorema 1. Suponga que $\mathbf{A} = \nabla\phi$ en cualquier parte de una región \mathbb{R} del espacio, donde \mathbb{R} está definida por $a_1 \leq x \leq a_2, b_1 \leq y \leq b_2, c_1 \leq z \leq c_2$, y en la que $\phi(x, y, z)$ es de una sola variable y tiene derivadas continuas en \mathbb{R} . Entonces:

- i. $\int_{P_1}^{P_2} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ es independiente de la trayectoria C que une a P_1 y P_2 en \mathbb{R}
- ii. $\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = 0$, alrededor de cualquier curva cerrada, C en \mathbb{R}

Donde, \mathbf{A} se denomina campo vectorial conservativo y ϕ es la función potencial de \mathbf{A} .

Ejemplo 5.10. Determinar que $\mathbf{A}(x, y, z) = (2x + yz, 2y + xz, xy)$ es conservativo determinando su función potencial.

Solución

$\mathbf{A} = \nabla\phi = (\phi_x, \phi_y, \phi_z) = (2x + yz, 2y + xz, xy)$, donde,

$\phi_x = 2x + yz, \phi_y = 2y + xz, \phi_z = xy$, en el sistema resultante se toma $\phi_z = xy$ e integrando con respecto a la variable z , se obtiene,

$\int \partial\phi = \int xy \partial z$, o sea, $\phi(x, y, z) = xyz + m(x, y)$, luego derivando ϕ respecto a x ,

$\phi_x = yz + m_x(x, y) = 2x + yz$, se tiene, $m_x(x, y) = 2x$, luego, integrando respecto a x ,

$\int m_x(x, y) = \int 2x dx + n(y) = x^2 + n(y)$, y de, $\phi(x, y, z) = xyz + m(x, y)$, se obtiene, $\phi(x, y, z) = xyz + x^2 + n(y)$, luego derivando ϕ respecto a y , se tiene,

$\phi_y = xz + n_y(y) = 2y + xz$, se tiene, $n_y(y) = 2y$, luego, integrando respecto a y ,

$\int n_y(y) = \int 2y dy = y^2 + k$, y de, $\phi(x, y, z) = xyz + x^2 + n(y)$, se obtiene,

$\phi(x, y, z) = xyz + x^2 + y^2 + k$, por tanto, \mathbf{A} es un campo vectorial conservativo.

Ejemplo 5.11. Determinar que $\mathbf{A}(x, y, z) = (e^x \cos y + yz, xz - e^x \sen y, xy + z)$ es conservativo determinando su función potencial ϕ y si \mathbf{A} es un campo vectorial irrotacional.

Solución

$\mathbf{A} = \nabla\phi = (\phi_x, \phi_y, \phi_z) = (e^x \cos y + yz, xz - e^x \sin y, xy + z)$, donde,

$\phi_x = e^x \cos y + yz$, $\phi_y = xz - e^x \sin y$, $\phi_z = xy + z$, en el sistema resultante se toma $\phi_x = e^x \cos y + yz$ e integrando con respecto a la variable x , se obtiene,

$\int \partial\phi = \int (e^x \cos y + yz) \partial x$, o sea, $\phi = e^x \cos y + xyz + m(y, z)$,

calculando ϕ_y , $\phi_y = -e^x \sin y + xz + m_y(y, z) = xz - e^x \sin y$, se tiene, $m_y(y, z) =$

0 , integrando $m_y \int m_y(x, y) = \int 0 dy + n(y) = k_1 + n(z)$, o sea, $\phi = e^x \cos y +$

$xyz + k_1 + n(z)$, derivando ϕ respecto a z , se tiene, $\phi_z = xz + n_z(z) = xy + z$, es

decir, $n_z(z) = z$ integrando $n_z(y) = z$, $\int n_z = \int z dz = \frac{z^2}{2} + k_2$

Es decir, $\phi(x, y, z) = e^x \cos y + xyz + \frac{z^2}{2} + k$, haciendo, $k_1 + k_2 = k$. Para verificar que \mathbf{A} es un campo vectorial conservativo, se realiza lo siguiente,

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = \phi_x = \frac{\partial}{\partial x} \left(e^x \cos y + xyz + \frac{z^2}{2} + k \right) = e^x \cos y + yz,$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial y} = \phi_y = \frac{\partial}{\partial y} \left(e^x \cos y + xyz + \frac{z^2}{2} + k \right) = xz - e^x \sin y,$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial z} = \phi_z = \frac{\partial}{\partial z} \left(e^x \cos y + xyz + \frac{z^2}{2} + k \right) = xy + z$$

Por tanto, \mathbf{A} es un campo vectorial conservativo

Para determinar si \mathbf{A} es irrotacional se parte de la definición:

$$\text{rot } \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) = \mathbf{0}, \text{ al reemplazar, se tiene,}$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = (x - x, y - y, -e^x \sin y + e^x \sin y) = (0, 0, 0) = \mathbf{0}, \text{ luego } \mathbf{A} \text{ es irrotacional}$$

Ejemplo 5.12. Dado $\mathbf{A} = (3x^2 + 6y)\mathbf{i} - 14yz\mathbf{j} + 20xz^2\mathbf{k}$, se pide hallar $\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ de $(0,0,0)$ a $(1,1,1)$, a lo largo de las trayectorias C siguientes:

- $x = t, y = t^2$ y $z = t^3$
- La línea recta que va de $(0,0,0)$ a $(1,0,0)$, luego va a $(1,1,0)$ y finalmente a $(1,1,1)$.
- La línea recta que une al punto $(0,0,0)$ con $(1,1,1)$.

Solución

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} &= \int_C [(3x^2 + 6y)\mathbf{i} - 14yz\mathbf{j} + 20xz^2\mathbf{k}] \cdot (dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}) \\ &= \int_C (3x^2 + 6y)dx - 14yzdy + 20xz^2dz \end{aligned}$$

a) Si $x = t, y = t^2$ y $z = t^3$, los puntos $(0,0,0)$ y $(1,1,1)$ corresponden a $t = 0$ y $t = 1$, respectivamente. Entonces:

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} &= \int_{t=0}^1 (3t^2 + 6t^2)dt - 14(t^2)(t^3)d(t^2) + 20(t)(t^3)^2d(t^3) \\ &= \int_{t=0}^1 9t^2dt - 28t^6dt + 60t^9dt \\ &= \int_{t=0}^1 (9t^2 - 28t^6 + 60t^9)dt = 3t^3 - 4t^7 + 6t^{10} \Big|_0^1 = 5 \end{aligned}$$

Otro método

A lo largo de C con $\mathbf{A} = 9t^2\mathbf{i} - 14t^5\mathbf{j} + 20t^7\mathbf{k}$, $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$ y del vector posición, $d\mathbf{r} = (\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + 3t^2\mathbf{k})dt$, se obtiene,

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} &= \int_{t=0}^1 (9t^2\mathbf{i} - 14t^5\mathbf{j} + 20t^7\mathbf{k}) \cdot (\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + 3t^2\mathbf{k})dt \\ &= \int_0^1 (9t^2 - 28t^6 + 60t^9)dt = 5 \end{aligned}$$

b) A lo largo de la recta que va de $(0,0,0)$ a $(1,0,0)$, $y = 0, z = 0, dy = 0$ y $dz = 0$, mientras que x varía de 0 a 1, luego, la integral sobre esta parte del recorrido está dada por:

$$\int_{x=0}^1 (3x^2 + 6(0))dx - 14(0)(0)(0) + 20x(0)^2(0) = \int_{x=0}^1 3x^2dx = x^3 \Big|_0^1 = 1$$

También, a lo largo de la recta que va de $(1,0,0)$ a $(1,1,0)$, $x = 1, z = 0, dx = 0$ y $dz = 0$, en tanto que y varía de 0 a 1, se obtiene que la integral para esta parte de la trayectoria resulta:

$$\int_{y=0}^1 (3(1)^2 + 6y)0 - 14y(0)dy + 20(1)(0)^20 = 0$$

Sobre la línea recta que une $(1,1,0)$ con $(1,1,1)$, $x = 1$, $y = 1$, $dx = 0$, $dy = 0$, y z varía de 0 a 1, de manera que la integral sobre esta parte de la trayectoria es:

$$\int_{z=0}^1 (3(1)^2 + 6(1))0 - 14(1)z(0) + 20(1)z^2 dz = \int_{z=0}^1 20z^2 dz = \frac{20z^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{20}{3}$$

En resumen, se obtiene lo siguiente:

$$\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = 1 + 0 + \frac{20}{3} = \frac{23}{3}$$

c) La línea recta que une al punto $(0,0,0)$ con $(1,1,1)$ está dada en forma paramétrica por $x = t$, $y = t$ y $z = t$. Entonces:

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} &= \int_{t=0}^1 (3t^2 + 6t)dt - 14(t)(t)dt + 20(t)(t)^2 dt \\ &= \int_{t=0}^1 (3t^2 + 6t - 14t^2 + 20t^3)dt = \int_{t=0}^1 (6t - 11t^2 + 20t^3)dt = \frac{13}{3} \end{aligned}$$

Ejemplo 5.13. Calcule el trabajo total realizado cuando se mueve una partícula en el campo de fuerzas dado por $\mathbf{F} = z\mathbf{i} + z\mathbf{j} + x\mathbf{k}$, a lo largo de la hélice C , dada por $x = \cos t$, $y = \sin t$ y $z = t$, donde, $t = 0$ hasta $t = \pi/2$.

Solución

$$\begin{aligned} \text{Trabajo} &= \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C (z\mathbf{i} + z\mathbf{j} + x\mathbf{k}) \cdot (dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}) \\ &= \int_C (zdx + zdy + xdz) = \int_0^{\pi/2} (t d(\cos t) + t d(\sin t) + \cos t dt) \\ &= \int_0^{\pi/2} (-t \sin t) dt + \int_0^{\pi/2} (t + 1) \cos t dt \end{aligned}$$

Por otro lado, al evaluar, $\int_0^{\pi/2} (-t \sin t) dt$, (usando integral por parte) se obtiene,

$$[t \cos t]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \cos t dt = 0 - [\sin t]_0^{\pi/2} = -1.$$

La evaluación de, $\int_0^{\pi/2} (t + 1) \cos t dt$ nos proporciona,

$$[(t + 1)\sin t]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin t dt = \frac{\pi}{2} + 1 + [\cos t]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}.$$

Con lo cual, el trabajo total es: $(\pi/2) - 1$.

Ejemplo 5.14. Suponga que $\mathbf{F} = -3x^2\mathbf{i} + 5xy\mathbf{j}$, se pide evaluar $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, donde C es la curva en el plano xy , $y = 2x^2$, de $P(0,0)$ a $Q(1,2)$

Solución

En virtud de que la integración se lleva a cabo en el plano xy ($z = 0$), se puede tomar $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$, por tanto,

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C (-3x^2\mathbf{i} + 5xy\mathbf{j}) \cdot (dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j}) = \int_C (-3x^2 dx + 5xy dy)$$

Primer método. Sea $x = t$ en $y = 2x^2$, luego las ecuaciones paramétricas de C son $x = t$ y $y = 2t^2$. Los puntos $P(0,0)$ y $Q(1,2)$ corresponden a $t = 0$ y $t = 1$, por tanto,

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_{t=0}^1 [-3t^2 dt + 5t(2t^2)d(2t^2)] \\ &= \int_{t=0}^1 (-3t^2 + 40t^4) dt = [-t^3 + 8t^5]_0^1 = 7. \end{aligned}$$

Segundo método. Al sustituir, $y = 2x^2$ directamente, donde x va de 0 a 1, se obtiene:

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_{x=0}^1 [-3x^2 dx + 5x(2x^2)d(2x^2)] \\ &= \int_{x=0}^1 (-3x^2 + 40x^4) dx = [-x^3 + 8x^5]_0^1 = 7 \end{aligned}$$

Ejemplo 5.15. dado el campo de fuerzas $\mathbf{F} = (2x - y + z)\mathbf{i} + (x + y - z^2)\mathbf{j}$. Se pide calcular el trabajo realizado cuando se mueve una partícula alrededor de un círculo C en el plano xy con centro en el origen y radio igual a 3.

Solución

En el plano $z = 0$, $\mathbf{F} = (2x - y)\mathbf{i} + (x + y)\mathbf{j} + (3x - 2y)\mathbf{k}$ y $d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j}$, por lo que el trabajo realizado es,

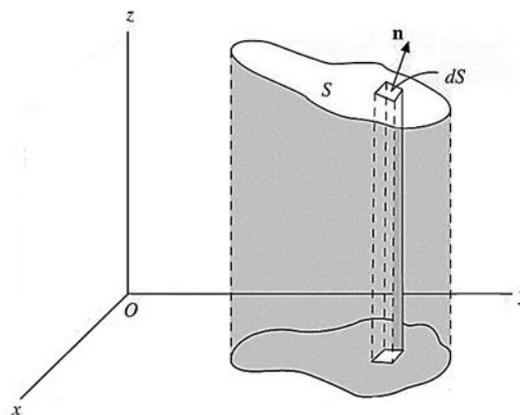
$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_C [(2x - y)\mathbf{i} + (x + y)\mathbf{j} + (3x - 2y)\mathbf{k}] \cdot (dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j}) \\ &= \int_C (2x - y)dx + (x + y)dy \end{aligned}$$

5.3. Integrales de superficie

Sea S una superficie (ver figura 79), un lado de S se toma arbitrariamente como lado positivo (si S es una superficie cerrada, como una esfera, se toma arbitrariamente como lado positivo). La normal unitaria \mathbf{n} en cualquier punto del lado positivo de S se llama normal unitaria positiva o dirigida hacia fuera.

Figura 79

Integral de superficie



Nota: Autor (2024)

Asociando con la diferencial de la superficie, dS , un vector $d\mathbf{S}$ de magnitud dS cuya dirección es la de \mathbf{n} , entonces, $d\mathbf{S} = \mathbf{n}dS$, y su integral $\iint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}dS$, es un ejemplo de una integral de superficie llamada flujo de \mathbf{A} sobre S . Otras integrales de superficie son las siguientes: $\iint_S \phi dS$, $\iint_S \phi \mathbf{n}dS$, $\iint_S \mathbf{A} \times d\mathbf{S}$, donde ϕ es una función escalar. Estas integrales se definen en términos de límites de sumas similar a lo visto en el curso de cálculo integral elemental.

En ocasiones se emplea la notación \oiint_S para indicar una integración sobre la superficie cerrada S . Cuando no haya confusión posible también puede usarse la notación \oint_S .

Para calcular las integrales de superficie conviene expresarlas como integrales dobles sobre el área proyectada de la superficie S en uno de los planos coordenados. Esto es posible si cualquier línea normal al plano de coordenadas seleccionado intersecta la superficie al menos en un punto, sin embargo, esto no plantea ningún problema real ya que S normalmente puede dividirse en superficies que satisfagan esta condición.

Ejemplo 5.16. Hallar la integral de superficie $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS$, con, $\mathbf{F}(x, y, z) = xy\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + zx\mathbf{k}$ y

S es la superficie del paraboloides $z = 4 - x^2 - y^2$ que se encuentra encima del cuadrado $-1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1$, y tiene orientación hacia arriba.

Solución

La superficie S se puede representar mediante la forma vectorial,

$\mathbf{r}(x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + (4 - x^2 - y^2)\mathbf{k}, -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1$, de ello se deduce que

$\mathbf{r}_x = \mathbf{i} - 2x\mathbf{k}, \mathbf{r}_y = \mathbf{j} - 2y\mathbf{k}$, o sea $\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + \mathbf{k}$, con $-1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1$

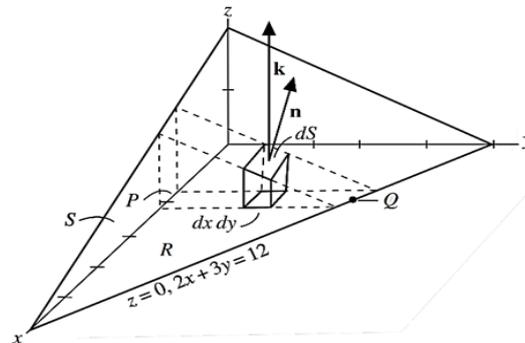
Y de, $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS = \iint_R \mathbf{F} \cdot (\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y) \, dA$, se obtiene,

$$\begin{aligned} &= \int_{y=-1}^1 \int_{x=-1}^1 (2x^2z + 2y^2(4 - x^2 - y^2) + x(4 - x^2 - y^2)) \, dx \, dy \\ &= \int_{y=-1}^1 \left(\frac{4}{3}y + 16y^2 - \frac{4}{3}y^2 - 4y^4 \right) \, dy = \left[\frac{2}{3}y^2 + \frac{44}{9}y^3 - \frac{4}{5}y^5 \right]_{-1}^1 = \frac{368}{45} \end{aligned}$$

Ejemplo 5.17. Hallar $\iint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \, dS$ donde $\mathbf{A} = 18z\mathbf{i} - 12\mathbf{j} + 3y\mathbf{k}$ y S es la región del plano $2x + 3y + 6z = 12$, que se localiza en el primer octante.

Figura 80

Integral de superficie



Nota: Autor (2024)

Solución

La superficie S y su proyección R sobre el plano xy se presentan en la figura.

Por definición, $\iint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS = \iint_R \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \frac{dx dy}{\|\mathbf{n} \cdot \mathbf{k}\|}$, Además, una vector perpendicular a la superficie $2x + 3y + 6z = 12$ está dado por $\nabla(2x + 3y + 6z) = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$, luego, un vector normal unitario \mathbf{n} a cualquier punto de S , está dado por,

$$\mathbf{n} = \frac{2\mathbf{i}+3\mathbf{j}+6\mathbf{k}}{\sqrt{2^2+3^2+6^2}} = \frac{2}{7}\mathbf{i} + \frac{3}{7}\mathbf{j} + \frac{6}{7}\mathbf{k}, \text{ de manera que, } \mathbf{n} \cdot \mathbf{k} = \left(\frac{2}{7}\mathbf{i} + \frac{3}{7}\mathbf{j} + \frac{6}{7}\mathbf{k}\right) \cdot \mathbf{k} = \frac{6}{7}$$

por lo que, $\frac{dx dy}{\|\mathbf{n} \cdot \mathbf{k}\|} = \frac{7}{6} dx dy$ luego, $\mathbf{A} \cdot \mathbf{n} = (18\mathbf{i} - 12\mathbf{j} + 3y\mathbf{k}) \cdot \left(\frac{2}{7}\mathbf{i} + \frac{3}{7}\mathbf{j} + \frac{6}{7}\mathbf{k}\right) = \frac{36z-36+18y}{7} = \frac{36-12x}{7}$ y considerando que, $z = (12 - 2x - 3y)/6$, de la ecuación de S , se tiene entonces:

$$\iint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS = \iint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \frac{dx dy}{\|\mathbf{n} \cdot \mathbf{k}\|} = \iint_S \left(\frac{36 - 12x}{7}\right) \frac{7}{6} dx dy = \iint_S (6 - 2x) dx dy$$

Para evaluar esta integral doble sobre S , se mantiene fija a x y se integra con respecto a y desde $y = 0$, hasta $y = (12 - 2x)/3$; luego se integra con respecto de x , de $x = 0$ a $x = 6$. De esta manera, R queda cubierta por completo. La integral se convierte en:

$$\int_{x=0}^{x=6} \int_{y=0}^{y=(12-2x)/3} (6 - 2x) dy dx = \int_{x=0}^{x=6} \left(24 - 12x + \frac{4x^2}{3}\right) dx = 24$$

Ejemplo 5.18 Hallar $\iint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \, dS$ donde $\mathbf{A} = z\mathbf{i} + x\mathbf{j} - 3y^2z\mathbf{k}$ y S es la superficie del plano $x^2 + y^2 = 16$, que se localiza en el primer octante limitado por los planos $z = 0$ y $z = 5$.

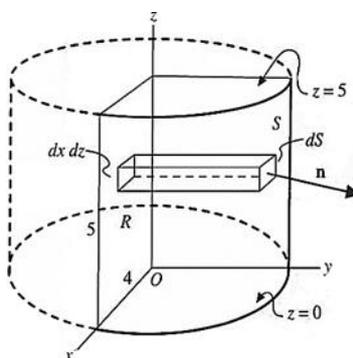
Solución

En la figura se proyecta S sobre el plano xz y se llama R a dicha proyección. Observe que en este caso no puede usarse la proyección de S sobre el plano xy . Por tanto,

$$\iint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \, dS = \iint_R \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \frac{dx dz}{|\mathbf{n} \cdot \mathbf{j}|}$$

Figura 81

Integral de superficie



Nota: Autor (2024)

Una normal a $x^2 + y^2 = 16$ es $\nabla(x^2 + y^2) = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j}$. Entonces, como se aprecia en la figura, la normal unitaria a S es

$$\mathbf{n} = \frac{2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j}}{\sqrt{(2x)^2 + (2y)^2}} = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j}}{4}, \text{ ya que } x^2 + y^2 = 16 \text{ sobre } S$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{n} = (z\mathbf{i} + x\mathbf{j} - 3y^2z\mathbf{k}) \cdot \left(\frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j}}{4}\right) = \frac{1}{4}(xz + xy)$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{j} = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j}}{4} \cdot \mathbf{j} = \frac{y}{4}$$

Entonces, la integral de superficie es igual a:

$$\iint_R \frac{xz + xy}{y} \, dx dz = \int_{z=0}^5 \int_{x=0}^4 \left(\frac{xz}{\sqrt{16-x^2}} + x\right) \, dx dz = \int_{z=0}^5 (4z + 8) dz = 90$$

Ejemplo 5.19. Hallar $\iint_S \phi \mathbf{n} dS$ donde $\phi = \frac{3}{8}xyz$ y S es la superficie: $x^2 + y^2 = 16$

Solución

Por definición, $\iint_S \phi \mathbf{n} dS = \iint_R \phi \mathbf{n} \frac{dx dz}{\|\mathbf{n} \cdot \mathbf{j}\|}$, y de, $\mathbf{n} = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j}}{4}$, $\mathbf{n} \cdot \mathbf{j} = \frac{y}{4}$, se tiene,

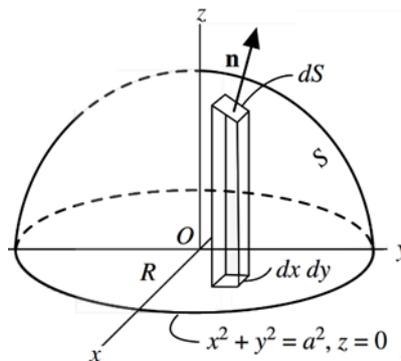
$$\iint_R \frac{3}{8}xz(x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) dx dz = \frac{3}{8} \int_{z=0}^{z=5} \int_{x=0}^{x=4} (x^2z\mathbf{i} + xz\sqrt{16-x^2}\mathbf{j}) dx dz$$

$$= \frac{3}{8} \int_{z=0}^5 \left(\frac{64}{3}z\mathbf{i} + \frac{64}{3}z\mathbf{j} \right) dz = 100\mathbf{i} + 100\mathbf{j}$$

Ejemplo 5.20. Sea la función $\mathbf{F} = y\mathbf{i} + (x - 2xz)\mathbf{j} - xy\mathbf{k}$, se pide hallar $\iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dS$ donde S es la superficie de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ sobre el plano xy

Figura 82

Integral de superficie



Nota: Autor (2024)

Solución

Por definición, $\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & x - 2xz & -xy \end{vmatrix} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} - 2z\mathbf{k}$

Una normal a la esfera de ecuación, $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ será,

$\nabla(x^2 + y^2 + z^2) = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$, luego, la normal unitaria,

\mathbf{n}_u , de la figura 5.20 está dada por

$$\mathbf{n} = \frac{2xi+2yj+2zk}{\sqrt{4x^2+4y^2+4z^2}} = \frac{xi+yj+zk}{a}, \text{ puesto que, } x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

La proyección de S sobre el plano xy es la región R acotada por la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$ y $z = 0$ (ver figura), entonces,

$$\begin{aligned} \iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{ndS} &= \iint_R (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} \frac{dxdy}{\|\mathbf{n} \cdot \mathbf{k}\|} \\ &= \iint_R (\mathbf{xi} + \mathbf{yj} - 2z\mathbf{k}) \cdot \left(\frac{\mathbf{xi} + \mathbf{yj} + z\mathbf{k}}{a} \right) \frac{dxdy}{z/a} \\ &= \int_{x=-a}^a \int_{y=-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} \frac{3(x^2 + y^2) - 2a^2}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dydx \end{aligned}$$

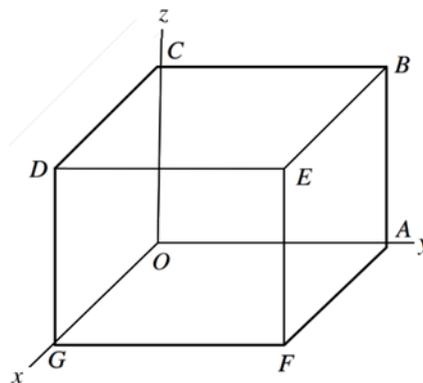
Para evaluar la doble integral se transforma a coordenadas polares (ρ, ϕ) donde $x = \rho \cos \phi, y = \rho \sin \phi$ y $dydx$, es sustituida por $\rho d\rho d\phi$. La doble integral se convierte en:

$$= \int_{x=-a}^a \int_{y=-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} \frac{3(x^2 + y^2) - 2a^2}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dydx = 4 \int_0^\pi \int_0^a \frac{3\rho^3 - 2\rho a^2}{\sqrt{a^2 - \rho^2}} \rho d\rho d\phi = k$$

Ejemplo 5.21. Sea $\mathbf{F} = 4xzi - y^2\mathbf{j} + yz\mathbf{k}$, se pide $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{ndS}$, S es la superficie del cubo acotado por $x = 0, x = 1, y = 0, y = 1$ y $z = 0, z = 1$

Figura 83

Integral de superficie



Nota: Autor (2024)

Solución

Cara DEFG: $\mathbf{n} = \mathbf{i}, x = 1$. Entonces,

$$\begin{aligned} \iint_{DEFG} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS &= \int_0^1 \int_0^1 (4z\mathbf{i} - y^2\mathbf{j} + yz\mathbf{k}) \cdot \mathbf{i} \, dydz \\ &= \int_0^1 \int_0^1 (4z\mathbf{i} - y^2\mathbf{j} + yz\mathbf{k}) \cdot \mathbf{i} \, dydz = \int_0^1 \int_0^1 4z \, dydz = 2 \end{aligned}$$

Cara ABCO: $\mathbf{n} = -\mathbf{i}$, $x = 0$, por lo que

$$\iint_{ABCO} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS = \int_0^1 \int_0^1 (-y^2\mathbf{j} + yz\mathbf{k}) \cdot (-\mathbf{i}) \, dydz = 0$$

Cara ABEF: $\mathbf{n} = \mathbf{j}$, $y = 1$, es decir,

$$\iint_{ABEF} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS = \int_0^1 \int_0^1 (4xz\mathbf{i} - \mathbf{j} + z\mathbf{k}) \cdot \mathbf{j} \, dx dz = \int_0^1 \int_0^1 -1 \, dx dz = -1$$

Cara OGDC: $\mathbf{n} = -\mathbf{j}$, $y = 0$, por lo que,

$$\iint_{OGCC} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS = \int_0^1 \int_0^1 (4x\mathbf{i}) \cdot (-\mathbf{j}) \, dx dz = 0$$

Cara BCDE: $\mathbf{n} = \mathbf{k}$, $z = 1$, por tanto,

$$\iint_{BCDE} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS = \int_0^1 \int_0^1 (4xx - y^2\mathbf{j} + y\mathbf{k}) \cdot \mathbf{k} \, dx dy = \int_0^1 \int_0^1 y \, dx dy = \frac{1}{2}$$

Cara AFGO: $\mathbf{n} = -\mathbf{k}$, $z = 0$. Entonces

$$\iint_{AFGO} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS = \int_0^1 \int_0^1 (-y^2\mathbf{j}) \cdot (-\mathbf{k}) \, dx dy = 0, \text{ finalmente se tiene como resultado,}$$

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS = \iint_S (4xz\mathbf{i} - y^2\mathbf{j} + yz\mathbf{k}) \cdot \mathbf{n} \, dS = 2 + 0 + (-1) + 0 + \frac{1}{2} + 0 = \frac{3}{2}$$

5.4. Integrales de volumen

En cálculo vectorial, las integrales de volumen se emplean para determinar el volumen de una región en el espacio tridimensional, así como otras magnitudes físicas como la masa, la carga, el flujo de un campo vectorial, entre otras. Para ello, si se considera una superficie cerrada en el espacio que encierra un volumen V , estas integrales, se denotan como sigue:

$$\iiint_V \mathbf{A} \, dV \text{ y } \iiint_V \phi \, dV$$

En coordenadas cartesianas 3D, el elemento de volumen dV es $dx dy dz$. La función escalar puede ser la divergencia de una función vectorial.

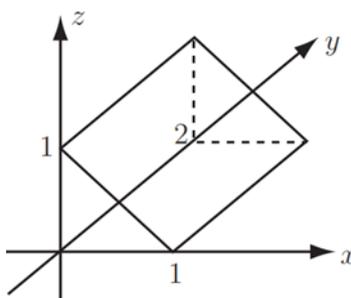
Ejemplo 5.22. Integrar la función $F = x^2\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ sobre el prisma delimitado por $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq (1 - x)$

Solución

$$\begin{aligned} & \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^2 \int_{z=0}^{1-x} (x^2\mathbf{i} + 2\mathbf{j}) \, dz dy dx \\ &= \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^2 [x^2z\mathbf{i} + 2z\mathbf{j}]_0^{1-x} dy dx \\ &= \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^2 [x^2(1-x)\mathbf{i} + 2(1-x)\mathbf{j}] dy dx \\ &= \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^2 [(x^2 - x^3)\mathbf{i} + (2 - 2x)\mathbf{j}] dy dx = \int_{x=0}^1 [(2x^2 - 2x^3)\mathbf{i} + (4 - 4x)\mathbf{j}] dx \\ &= \left[\left(\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^4 \right)\mathbf{i} + (4x - 2x^2)\mathbf{j} \right]_0^1 = \frac{1}{6}\mathbf{i} + 2\mathbf{j} \end{aligned}$$

Figura 84

Integral de volumen



Nota: Autor (2024)

Ejemplo 5.22. Integrar $\nabla \cdot \mathbf{F}$ sobre el cubo unitario $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1$ donde F es la función vectorial $x^2y\mathbf{i} + (x - z)\mathbf{j} + 2xz^2\mathbf{k}$.

Solución

$$\begin{aligned} \text{Por definición, } \nabla \cdot \mathbf{F} &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \right) \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial F_y}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \mathbf{k} \right) = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \\ &= \frac{\partial(x^2y)}{\partial x} + \frac{\partial(x-z)}{\partial y} + \frac{\partial(2xz^2)}{\partial z} = 2xy + 4xz \end{aligned}$$

Por tanto, la integral correspondiente es,

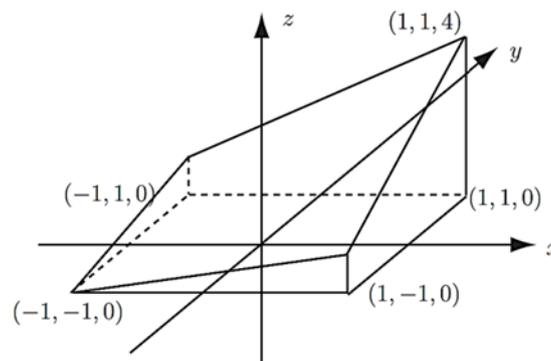
$$\int_{x=0}^1 \int_{y=0}^1 \int_{z=0}^1 (2xy + 4xz) dz dy dx = \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^1 [2xyz + 2xz^2]_0^1 dy dx$$

$$\int_{x=0}^1 \int_{y=0}^1 (2xy + 2x) dy dx = \int_{x=0}^1 [xy^2 + 2xy]_0^1 dx = \int_{x=0}^1 3x dx = \left[\frac{3}{2} x^2 \right]_0^1 = \frac{3}{2}$$

Ejemplo 5.23. Dada la función $\mathbf{F} = x^2y\mathbf{i} + y^2\mathbf{j}$, evaluar $\iiint_V (\nabla \times \mathbf{F}) dV$ donde V es el volumen bajo el plano $z = x + y + 2$ (y sobre $z = 0$) para $-1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1$.

Figura 85

Integral de volumen



Nota: Autor (2024)

Solución

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2y & y^2 & 0 \end{vmatrix} = -x^2\mathbf{k}$$

$$\iiint_V (\nabla \times \mathbf{F}) dV = \int_{x=-1}^1 \int_{y=-1}^1 \int_{z=0}^{x+y+2} (-x^2\mathbf{k}) dz dy dx$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{x=-1}^1 \int_{y=-1}^1 [-zx^2 \mathbf{k}]_0^{x+y+2} dy dx = \mathbf{k} \int_{x=-1}^1 \int_{y=-1}^1 [-x^3 - x^2y - 2x^2]_0^{x+y+2} dy dx \\
 &= \mathbf{k} \int_{x=-1}^1 \left[-x^3y - \frac{1}{2}x^2y^2 - 2x^2y \right]_{y=-1}^1 dx = \mathbf{k} \int_{x=-1}^1 (-2x^3 - 4x^2) dx \\
 &= \mathbf{k} \left[-\frac{1}{2}x^4 - \frac{4}{3}x^3 \right]_{x=-1}^1 = -\frac{8}{3} \mathbf{k}
 \end{aligned}$$

Ejemplo 5.24. Dada la función $F = (2x^2 - 3z)\mathbf{i} - 2xy\mathbf{j} - 4x\mathbf{k}$, evaluar $\iiint_V (\nabla \cdot F) dV$ y $\iiint_V (\nabla \times F) dV$ donde V es la región limitada por los planos $x = 0, y = 0, z = 0$ y $2x + 2y + z = 4$.

Solución

A partir de, $\iiint_V (\nabla \cdot \mathbf{F}) dV = \iiint_V \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \right) \cdot ((2x^2 - 3z)\mathbf{i} - 2xy\mathbf{j} - 4x\mathbf{k}) dV$

$$\begin{aligned}
 &= \iiint_V (2x) dV = \iint 2x(4 - 2x - 2y) dy dx = \int_0^2 \int_0^{2-x} (8x - 4x^2 - 4xy) dy dx \\
 &= \int_0^2 (8xy - 4x^2y - 2xy^2) \Big|_{y=0}^{2-x} dx = \int_0^2 (8x - 8x^2 + 2x^3) dx \\
 &= \left(4x^2 - \frac{8}{3}x^3 + \frac{x^4}{2} \right) \Big|_0^2 = 16 - \frac{64}{3} + 8 = \frac{8}{3}
 \end{aligned}$$

A partir de, $\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2x^2 - 3z & -2xy & -4x \end{vmatrix} = \mathbf{j} - 2y\mathbf{k}$

$$\begin{aligned}
 \iiint_V (\nabla \times \mathbf{F}) dV &= \iiint_V (\mathbf{j} - 2y\mathbf{k}) dV = \int_0^2 \int_0^{2-x} (\mathbf{j} - 2y\mathbf{k})(z) \Big|_{z=0}^{4-2x-2y} dy dx \\
 &= \int_0^2 \left[(4y - 2xy - y^2)\mathbf{j} + 4 \left(\frac{xy^2}{2} + \frac{y^3}{3} - y^2 \right) \mathbf{k} \right] \Big|_{y=0}^{2-x} dx \\
 &= \int_0^2 [(4 - 4x + x^2)\mathbf{j} + 4(-x^2 + 2x - 4)\mathbf{k}] dx
 \end{aligned}$$

$$= \left[\left(4x - 2x^2 + \frac{x^3}{3} \right) \mathbf{j} + 4 \left(-\frac{x^3}{3} + x^2 - 4x \right) \mathbf{k} \right]_{y=0}^2$$

$$\left(8 - 8 + \frac{8}{3} \right) \mathbf{j} + 4 \left(-\frac{8}{3} + 4 - 8 \right) \mathbf{k} = \frac{8}{3} \mathbf{j} - \frac{80}{3} \mathbf{k}$$

5.5. El Teorema de la Divergencia o Teorema de Gauss

El Teorema de la Divergencia o Teorema de Gauss, es una herramienta muy útil en cálculo vectorial que relaciona el flujo de un campo vectorial a través de una superficie cerrada con la divergencia del campo en el volumen delimitado por dicha superficie.

De manera formal, el **Teorema de la divergencia de Gauss** parte del supuesto que si V es el volumen limitado por una superficie cerrada S y \mathbf{A} es una función vectorial de posición con derivadas continuas, entonces:

$$\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{A} \, dV = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS = \oiint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$$

Donde \mathbf{n} es la normal positiva (dirigida hacia fuera) a S .

Ejemplo 5.25. Sea $\mathbf{A} = (y^2 + x, y + xz, x)$ y S la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$. Usar el Teorema de la Divergencia para encontrar $\iint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \, dS$ donde \mathbf{n} es el vector normal a S en (x, y, z) .

Solución

Por el Teorema de la Divergencia, $\iint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \, dS = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{A} \, dV$

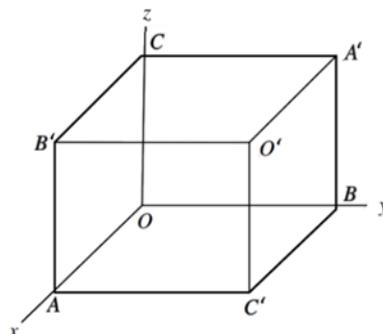
Es decir, $\text{div } \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{A} = 1 + 1 + 0 = 2$

De esta manera, se tiene, $\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{A} \, dV = 2 \iiint_V dV = 2\pi \left(\frac{4}{3}\right) (2)^3 = \frac{64\pi}{3}$

Ejemplo 5.26. Verificar el Teorema de la divergencia para $\mathbf{A} = (3xz, -2y^2, yz)$ sobre el cubo unitario $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1$

Figura 86

Teorema de la divergencia



Nota: Autor (2024)

Solución

Puesto que el cubo tiene seis caras, se obtiene,

$$\int_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{ndS} = \int_{S_1} \mathbf{A} \cdot \mathbf{ndS} + \int_{S_2} \mathbf{A} \cdot \mathbf{ndS} + \int_{S_3} \mathbf{A} \cdot \mathbf{ndS} +$$

$$+ \int_{S_4} \mathbf{A} \cdot \mathbf{ndS} + \int_{S_5} \mathbf{A} \cdot \mathbf{ndS} + \int_{S_6} \mathbf{A} \cdot \mathbf{ndS}$$

Donde, la superficie S_1 es la cara $AC'O'B'$ del cubo dado,

$S_2 = OBA'C, S_3 = BA'O'C', S_4 = OBA'C, S_5 = O'A'CB', S_6 = OAC'B.$

No hace falta decir que la proyección de S_2 en el plano yz es el propio S_2 . Del mismo modo, si proyectamos S_3 o S_4 en el plano zx , tenemos la proyección S_4 . Además, la proyección de cualquiera de S_5 y S_6 en el plano xy es S_6 .

Entonces, en cada ocasión, cuando proyectamos cualquiera de las caras del cubo dado en el plano de coordenadas paralelo a él, obtendremos un cuadrado de lado unidad.

En la superficie S_1 , es decir, en la cara $AC'O'B'$: $x = 1$ & $\mathbf{n} = \mathbf{i}$.

Por tanto, $\iint_{S_1} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \, dS = \iint_{S_1} (3z\mathbf{i} - 2y^2\mathbf{j} + yz\mathbf{k}) \cdot \mathbf{i} \, dS = \iint_{S_1} (3z) \, dS$

$$= \int_{y=0}^1 \int_{z=0}^1 (3z) \, dydz = 3 \left(\int_{y=0}^1 dy \right) \left(\int_{z=0}^1 z \, dz \right) = \frac{3}{2}$$

En la superficie S_2 , es decir, en la cara $OBA'C$: $x = 0$ & $\mathbf{n} = -\mathbf{i}$.

Por tanto, $\iint_{S_1} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \, dS = \iint_{S_1} (-2y^2\mathbf{j} + yz\mathbf{k}) \cdot (-\mathbf{i}) \, dS = 0$

En la superficie S_3 , es decir, en la cara $BA'O'C'$: $y = 1$ & $\mathbf{n} = \mathbf{j}$.

Por tanto, $\iint_{S_3} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \, dS = \iint_{S_3} (3xz\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + z\mathbf{k}) \cdot \mathbf{j} \, dS = \iint_{S_3} -2 \, dS$

$$= -2 \int_{x=0}^1 dx \int_{z=0}^1 dz = -2$$

En la superficie S_4 , es decir, en la cara $OBA'C$: $y = 0$ & $\mathbf{n} = -\mathbf{j}$.

Por tanto, $\iint_{S_4} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \, dS = \iint_{S_4} (-3xz\mathbf{i}) \cdot (-\mathbf{j}) \, dS = 0$

En la superficie S_5 , es decir, en la cara $OBA'C$: $z = 1$ & $\mathbf{n} = -\mathbf{k}$.

Por tanto, $\iint_{S_5} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \, dS = \iint_{S_5} (3xz\mathbf{i} - 2y^2\mathbf{j} + y\mathbf{k}) \cdot \mathbf{k} \, dS = \iint_{S_5} y \, dS$

$$= \int_{x=0}^1 dx \int_{y=0}^1 dz = \frac{1}{2}$$

En la superficie S_6 , es decir, en la cara $OAC'B$: $z = 0$ & $\mathbf{n} = -\mathbf{k}$.

Por tanto, $\iint_{S_6} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \, dS = \iint_{S_6} (-2y^2\mathbf{i}) \cdot \mathbf{k} \, dS = 0$

Luego, $\iint_{S_1} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \, dS = \frac{3}{2} + 0 - 2 + 0 + \frac{1}{2} + 0 = 0$

Es decir, $\text{div } \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial}{\partial x}(3xz) + \frac{\partial}{\partial y}(-2y^2) + \frac{\partial}{\partial z}3(z - y) = 3z - 3y$

Por tanto, el volumen V encerrado por la superficie S .

$$\int_V \text{div } \mathbf{F} \, dv = \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^1 \int_{z=0}^1 (3z - 3y) \, dx dy dz$$

$$\int_{x=0}^1 \left(\int_{y=0}^1 \int_{z=0}^1 (3z - 3y) \, dz dy \right) dx = 3 \int_{y=0}^1 \left[\left(\frac{z^2}{2} - yz \right) \right]_{z=0}^1 dy$$

$$3 \int_{y=0}^1 \left(\frac{1}{2} - y \right) dy = 3 \left[\left(\frac{y}{2} - \frac{y^2}{2} \right) \right]_{y=0}^1 = 0$$

Luego se concluye que se verifica el teorema de la divergencia, es decir,

$$\int_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \, dS = \int_V \text{div } \mathbf{A} \, dV$$

Ejemplo 5.27. Si V es el volumen encerrado por la superficie cerrada S , y $\mathbf{A} = (x, 2y, 3z)$ se pide de pide demostrar que $\iint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS = 6V$

Solución

A partir de, $\mathbf{A} = xi + 2yj + 3zk$, y de $\text{div } \mathbf{A} = \frac{\partial}{\partial x}(x) + \frac{\partial}{\partial y}(2y) + \frac{\partial}{\partial z}3z = 6$

Por el Teorema de la Divergencia de Gauss, se tiene,

$$\iint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS = \int_V \text{div } \mathbf{A} dV = \int_V 6dV = 6V$$

Ejemplo 5.27. Si $\mathbf{OA} = ai, \mathbf{OB} = aj, \mathbf{OC} = ak$ forman tres lados colindantes de un cubo y S representa la superficie cerrada del cubo, y $\mathbf{A} = (x^3 - yz, -2x^2y, 2)$, evaluar $\iint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS$ expresada como una integral de volumen.

Solución

A partir, $\text{div } \mathbf{A} = \frac{\partial}{\partial x}(x^3 - yz) + \frac{\partial}{\partial y}(-2x^2y) + \frac{\partial}{\partial z}(2) = 3x^2 - 2x^2 = x^2$

Por el Teorema de la Divergencia de Gauss, se tiene,

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS &= \int_V \text{div } \mathbf{A} dV = \int_{x=0}^a \int_{y=0}^a \int_{z=0}^a (x^2) dx dy dz \\ &= a \int_{x=0}^a \int_{y=0}^a x^2 dx dy = a^2 \int_{y=0}^a x^2 dx dy = \frac{1}{3} a^5 \end{aligned}$$

Ejemplo 5.28. Sea $\mathbf{A} = (2xy, -yz, x^2)$, evaluar $\iint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS$ donde S representa la superficie cerrada del cubo limitado por los planos coordenados y los planos $x = a, y = a, z = a$, mediante el Teorema de la Divergencia de Gauss.

Solución

A partir, $\text{div } \mathbf{A} = \frac{\partial}{\partial x}(2xy) + \frac{\partial}{\partial y}(-yz) + \frac{\partial}{\partial z}(x^2) = 2y - z$

Por el Teorema de la Divergencia de Gauss, se tiene,

$$\iint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS = \int_V \text{div } \mathbf{A} dV = \int_{x=0}^a \int_{y=0}^a \int_{z=0}^a (2y - z) dx dy dz$$

$$\begin{aligned}
 &= a \int_{x=0}^a \int_{y=0}^a \left[\left(\frac{z^2}{2} - yz \right) \right]_{z=0}^a dx dy = \int_{x=0}^a \int_{y=0}^a \left(2ay - \frac{a^2}{2} \right) dx dy \\
 &= \int_{x=0}^a \left[ay^2 - \frac{1}{2} a^2 y \right]_{y=0}^a dx = \int_{x=0}^a \left(a^3 - \frac{1}{2} a^3 \right) dx = \frac{1}{2} a^3 [x]_{x=0}^a = \frac{1}{2} a^4
 \end{aligned}$$

5.6. El Teorema de Stokes

El Teorema de Stokes, también conocido como Teorema de Kelvin-Stokes establece que la integral de línea de un campo vectorial sobre la frontera de una superficie orientada es igual a la integral de superficie del rotacional de ese campo sobre la superficie misma. Es decir, dada una superficie abierta S , y limitada por una curva C cerrada que no se interseca a sí misma (curva simple cerrada), y considerando una función vectorial \mathbf{A} con derivadas continuas, entonces se cumple lo siguiente,

$$\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n} dS = \iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S}$$

La dirección de C se llama positiva si un observador que caminara sobre la frontera de S en esa dirección, y \mathbf{n} es el vector normal unitario en cualquier punto de S que se dibuja en el sentido en que un tornillo a la derecha se movería al girar en el sentido de la descripción de C .

Ejemplo 5.28. Verifica el Teorema de Stokes para $\mathbf{A} = (2x - y, -yz^2, -y^2z)$ donde S es la parte superior de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ y C es su frontera.

Solución

A partir de, $\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int A_1 dx + A_2 dy + A_3 dz = \int (2x - y) dx - (yz^2) dy - (y^2z) dz$

$$\int_0^{2\pi} (2x - y) \frac{dx}{dt} dt = \int_0^{2\pi} (2 \cos t - \sin t) (-\sin t) dt = \int_0^{2\pi} (-2 \cos t \sin t + \sin^2 t) dt$$

$$= [\cos^2 t]_0^{2\pi} + 4 \int_0^{\pi/2} (\sin^2 t) dt = 0 + 4 \left(\frac{1}{2} \right) \left(\frac{\pi}{2} \right) = \pi$$

Por otro lado, del rotacional de \mathbf{A} , se tiene,

$$\nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2x - y & -yz^2 & -y^2z \end{vmatrix} = (-2yz + 2yz)\mathbf{i} + (0 - 0)\mathbf{j} + (0 + 1)\mathbf{k}$$

Luego, $\int_S \nabla \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} = \int_S \mathbf{n} \cdot \mathbf{k} \, ds = \iint_R (\mathbf{n} \cdot \mathbf{k}) \cdot \frac{dxdy}{\|\mathbf{n} \cdot \mathbf{k}\|}$ donde R es la proyección de S

$$\begin{aligned} \text{Es decir, } \int_S \nabla \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \, ds &= \int_{x=-1}^1 \int_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dxdy = 4 \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^{\sqrt{1-x^2}} dxdy \\ &= 4 \int_{x=0}^1 \sqrt{1-x^2} \, dx = 4 \left[\frac{x}{2} \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2} \sin^{-1} x \right]_0^1 = 4 \left(\frac{1}{2} \right) \left(\frac{\pi}{2} \right) = \pi \end{aligned}$$

Ejemplo 5.29. Verifica el Teorema de Stokes para $\mathbf{A} = (y, z, x)$ donde S es la parte de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ sobre el plano xy .

Solución

A partir de, $\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int A_1 dx + A_2 dy + A_3 dz = \int (y)dx - (z)dy - (x)dz$

Donde C es la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ en el plano xy , por tanto $z = 0, dz = 0$

De aquí, $\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int (y)dx = \int_0^{2\pi} (y) \frac{dx}{dt} dt$

Con $x = \cos t, y = \sin t, y \frac{dx}{dt} = -\sin t$, por tanto,

$$\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} (\sin t) (-\sin t) dt = -4 \int_0^{2\pi} (\sin^2 t) dt = -\pi$$

Por otro lado, del rotacional de \mathbf{A} , se tiene,

$$\nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & z & x \end{vmatrix} = -\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}$$

Luego, $\text{grad } \phi = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$, $\mathbf{n} = \frac{\text{grad } \phi}{\|\text{grad } \phi\|}$ donde \mathbf{n} es vector normal unitario

$$\mathbf{n} = \frac{2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}}{\sqrt{1-x^2}} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}, \text{ o sea,}$$

$$\int_S \nabla \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \, dS = - \int (x + y + z) \, dS$$

Usando coordenadas esféricas, se tiene,

$$x = \rho \sin \theta \cos \phi, y = \rho \sin \theta \sin \phi, z = \rho \cos \theta, \rho = 1$$

$$x = \sin \theta \cos \phi, y = \sin \theta \sin \phi, z = \cos \theta, dS = \cos \theta \, d\theta d\phi$$

$$\int_S \nabla \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \, dS = \int_{\theta=0}^{\pi/2} \int_{\phi=0}^{2\pi} (\sin \theta \cos \phi + \sin \theta \sin \phi + \cos \theta) \sin \theta \, d\theta d\phi$$

$$= 0 - \int_0^{\pi/2} (\sin \theta \cos \theta) \, d\theta [\phi]_0^{2\pi} = -2\pi \int_0^{\pi/2} (\sin \theta \cos \theta) \, d\theta = -2\pi \left[\frac{\sin^2 \theta}{2} \right]_0^{\pi/2} = -\pi$$

5.7. El Teorema de Green

El Teorema de Green establece una relación entre la integral de línea de un campo vectorial sobre una curva cerrada C en el plano y una integral doble sobre la región S que encierra C , para ello, considere que S es una región cerrada en el plano xy , limitada por una curva simple cerrada C , y que M y N son funciones continuas y diferenciables en x y y en R , entonces,

$$\oint_C Mdx + Ndy = \iint_S \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx dy$$

Donde C se recorre en la dirección positiva (en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj), en general, siempre se considera que la integral \oint está descrita en el sentido positivo.

El Teorema de Green en el plano es un caso especial del Teorema de Stokes, de manera similar, es de interés observar que el Teorema de la Divergencia de Gauss es una generalización del teorema de Green en el plano, en el cual la región (plano) S y su frontera cerrada (curva) C son sustituidas por una región (en el espacio) V y su frontera (superficie) cerrada S , por lo cual, en ocasiones el Teorema de la Divergencia de Gauss también recibe el nombre de Teorema de Green en el espacio.

5.7.1. Teoremas integrales relacionados al Teorema de Green

Para resolver problemas que involucran Teorema de Green, resulta útil aplicar las proposiciones siguientes.

Proposición 6.4: Se cumplen las leyes que siguen:

$$i. \quad \iiint_V [\phi \nabla^2 \psi + (\nabla \phi) \cdot (\nabla \psi)] dV = \iint_S (\phi \nabla \psi) \cdot d\mathbf{S}$$

Esta ley se llama Primera identidad o Teorema de Green.

$$ii. \quad \iiint_V [\phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi] dV = \iint_S (\phi \nabla \psi - \psi \nabla \phi) \cdot d\mathbf{S}$$

Esta ley se denomina Segunda Identidad, o Teorema Asimétrico de Green.

$$iii. \quad \iiint_V \nabla \times \mathbf{A} dV = \iint_S (\mathbf{n} \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} = \iint_S d\mathbf{S} \times \mathbf{A}$$

Aquí se observa que el producto punto del Teorema de la Divergencia de Gauss es reemplazado por el Producto Cruz.

$$iv. \quad \oint_C \phi d\mathbf{r} = \iint_S (\mathbf{n} \times \nabla \phi) \cdot d\mathbf{S} = \iint_S d\mathbf{S} \times \nabla \phi$$

Proposición 6.5: Ya sea que ψ represente una función vectorial o escalar, el símbolo \circ denota un producto punto o un producto cruz, o una multiplicación ordinaria, es decir,

$$i. \quad \iiint_V \nabla \circ \psi dV = \iint_S \mathbf{n} \circ \psi dS = \iint_S d\mathbf{S} \circ \psi$$

$$ii. \quad \oint_C d\mathbf{r} \circ \psi = \iint_S (\mathbf{n} \times \nabla) \circ \psi dS = \iint_S (d\mathbf{S} \times \nabla) \circ \psi$$

En muchas ocasiones resulta útil el uso de \circ para definir un producto punto, un producto cruz o una multiplicación. El resultado es de utilidad para ampliar los conceptos de gradiente, divergencia y rotacional a sistemas coordenados distintos del rectangular.

Ejemplo 5.30. Emplear el Teorema de Green para calcular $\int_C x^2 dx - yx^2 dy$ donde C se muestra en la figura 87.

Solución

De la figura 87 se observa que, al seguir en la dirección indicada, entonces, nuestra mano izquierda estará sobre el área cerrada, por lo que este camino tiene orientación positiva y se puede emplear el Teorema de Green para evaluar

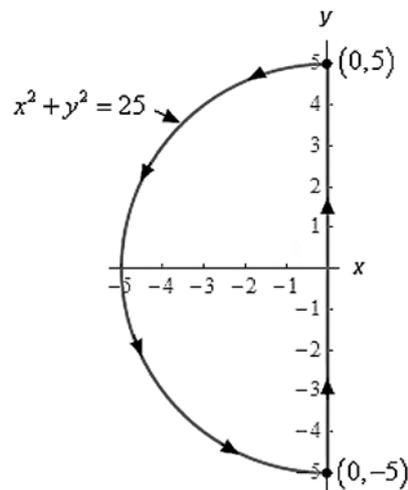
la integral, es decir, $M = yx^2, N = -x^2$, y al usar el Teorema de Green en la integral de línea se tiene entonces,

$$\int_C yx^2 dx - x^2 dy = \iint_S (-2x - x^2) \cdot dS$$

Y como S es sólo un semicírculo, tiene sentido utilizar coordenadas polares para este problema, donde los límites para S en coordenadas polares son respectivamente, $\frac{1}{2}\pi \leq \theta \leq \frac{3}{2}\pi, 0 \leq r \leq 5$

Figura 87

Teorema de Green



Nota: Autor (2024)

Donde, después de convertir la función en coordenadas polares, se obtiene,

$$\begin{aligned} \int_C yx^2 dx - x^2 dy &= \iint_S (-2x - x^2) \cdot dS \\ &= \int_{\theta=\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \int_{r=0}^5 r(-2r \cos \theta - r^2 \cos^2 \theta) dr d\theta \\ &= \int_{\theta=\pi/2}^{3\pi/2} \int_{r=0}^5 \left(-2r^2 \cos \theta - \frac{1}{2} r^3 (1 + \cos 2\theta) \right) dr d\theta \\ &= \int_{\theta=\pi/2}^{3\pi/2} \left[-2r^3 \cos \theta - \frac{1}{8} r^4 (1 + \cos 2\theta) \right]_0^5 d\theta \end{aligned}$$

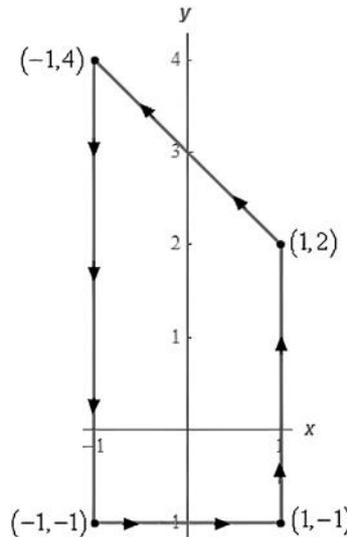
$$= \int_{\theta=\pi/2}^{3\pi/2} \left(-\frac{250}{3} \cos \theta - \frac{625}{8} (1 + \cos 2\theta) \right) d\theta$$

$$= \left[-\frac{250}{3} \sin \theta - \frac{625}{8} \left(\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right) \right]_{\pi/2}^{3\pi/2} = \frac{500}{3} - \frac{625}{8} \pi$$

Ejemplo 5.31. Empleando el Teorema de Green, hallar $\int_C (6y - 9x)dy - (xy - x^3)dx$ cuya trayectoria C se muestra en la figura.

Figura 88

Teorema de Green



Nota: Autor (2024)

Solución

De la figura 88 se observa que, al seguir en la dirección indicada, entonces, nuestra mano izquierda estará sobre el área cerrada, por lo que este camino tiene orientación positiva y se puede emplear el Teorema de Green para evaluar la integral, es decir, $M = x^3 - xy$, $N = 6y - 9x$, y al usar el Teorema de Green en la integral de línea se tiene entonces,

$$\int_C (6y - 9x)dy - (xy - x^3)dx = \iint_S (x - 9) \cdot dS$$

Donde S es la región encerrada por la curva. Además, se puede verificar que la ecuación de la línea a lo largo de la parte superior de la región está dada por $y = 3 - x$. Una vez que tenemos esta ecuación, se obtiene los límites para la región, los cuales corresponden a, $-1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 3 - x$

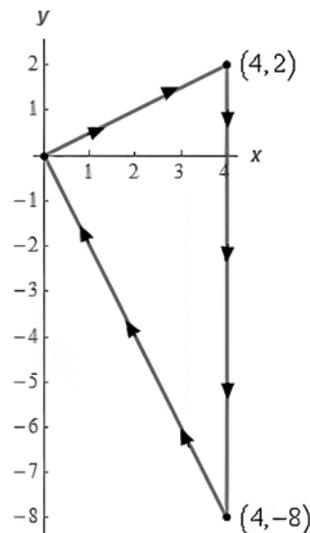
Evaluando la integral doble, se obtiene,

$$\begin{aligned} \int_C (6y - 9x)dy - (xy - x^3)dx &= \iint_S (x - 9) \cdot dS \\ &= \int_{x=-1}^1 \int_{y=-1}^{3-x} (x - 9) dx dy \\ &= \int_{x=-1}^1 [x - 9]_{-1}^{3-x} dx = \int_{x=-1}^1 (x - 9)(4 - x) dx \\ &= \int_{x=-1}^1 (-x^2 + 13x - 36) dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{13}{2}x^2 - 36x \right]_{x=-1}^1 = -\frac{218}{3} \end{aligned}$$

Ejemplo 5.32. Empleando el Teorema de Green, hallar $\int_C x^2y^2 dx + (x^3y + y^2)dy$ cuya trayectoria C se muestra en la figura 89.

Figura 89

Teorema de Green



Nota: Autor (2024)

Solución

De la figura 89 se observa que si seguimos por la trayectoria de la dirección indicada entonces nuestra mano izquierda NO estará sobre el área cerrada y por lo tanto este recorrido NO tiene orientación positiva, por lo que es necesario asignar una orientación contraria a la dada mediante $-C$, con lo cual se tendrá que, $M = x^2y^2, N = xy^3 + y^2$, y al usar el Teorema de Green en la integral de línea se tiene entonces,

$$\int_C x^2 y^2 dx + (x^3 y + y^2) dy = - \int_{-C} x^2 y^2 dx + (x^3 y + y^2) dy$$

$$\int_{-C} x^2 y^2 dx + (x^3 y + y^2) dy = \iint_S (3x^2 y - 2x^2 y) \cdot d\mathbf{S}$$

$$= \iint_S x^2 y \, d\mathbf{S} \text{ siendo } S \text{ la región encerrada}$$

Luego se puede verificar que la ecuación de la línea a lo largo de la parte superior de la región está dada por $y = \frac{1}{2}x$ y la ecuación de la línea a lo largo de la parte inferior de la región está dada por $y = -2x$. Una vez que se tienen estas ecuaciones, los límites para la región dada corresponden a,

$$0 \leq x \leq 4, -2x \leq y \leq \frac{1}{2}x$$

Evaluando la integral doble, se obtiene,

$$\iint_S x^2 y \, d\mathbf{S} = \int_{x=0}^4 \int_{y=-2x}^{x/2} x^2 y \, dy dx$$

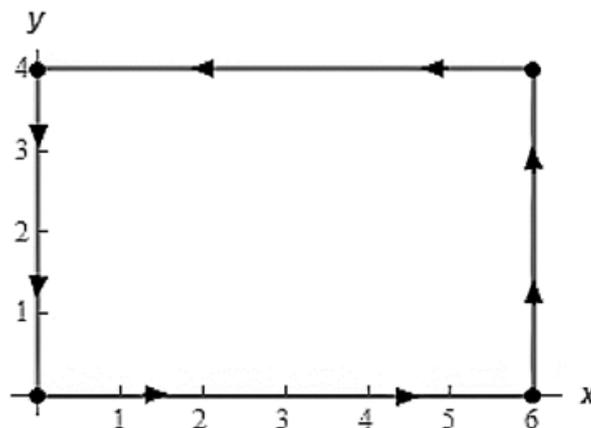
$$= \int_{x=-1}^1 \left[-\frac{15}{8} \right]_{-2x}^{x/2} dx = \int_{x=-1}^1 \left(-\frac{15}{8} x^4 \right) dx$$

$$= \left[-\frac{3}{8} x^5 \right]_{x=0}^4 = -384$$

Ejemplo 5.33. Usando el Teorema de Green, hallar $\int_C (y^4 - 2y) dx - (6x - 4xy^3) dy$ cuya trayectoria C se muestra en la figura 90.

Figura 90

Teorema de Green



Nota: Autor (2024)

Solución

De la figura 90 se observa que, al seguir en la dirección indicada, entonces, nuestra mano izquierda estará sobre el área cerrada, por lo que este camino tiene orientación positiva y se puede emplear el Teorema de Green para evaluar la integral, es decir, $M = y^4 - 2y$, $N = 4xy^3 - 6x$, y al usar el Teorema de Green en la integral de línea se tiene entonces,

$$\int_C (y^4 - 2y)dx - (4xy^3 - 6x)dy = \iint_S (4y^3 - 6 - 4xy^3 + 2) \cdot dS = -4 \iint_S dS$$

Siendo S la región encerrada y puesto que, $\iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dS = S$, luego, $-4(6)(4) = -96$

Ejemplo 5.34. Demuestre el teorema de Green en el plano, donde C es una curva cerrada que tiene la propiedad de que cualquier línea recta paralela a los ejes coordenados corta a C en dos puntos como máximo.

Solución

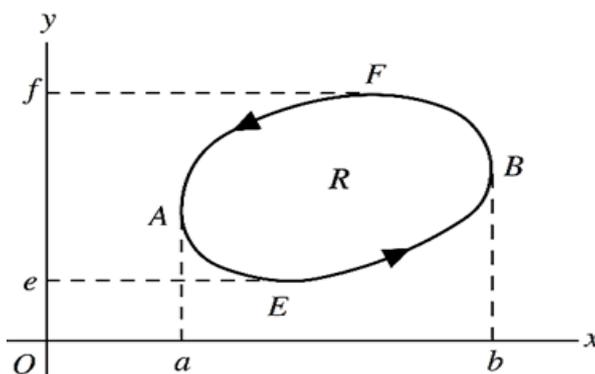
Sean las ecuaciones de las curvas AEB y AFB (ver Figura) $y = Y_1(x)$ y $y = Y_2(x)$, respectivamente. Si R es la región acotada por C , tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} \iint_R \frac{\partial M}{\partial y} dx dy &= \int_{x=a}^b \left[\int_{y=Y_1(x)}^{Y_2(x)} \frac{\partial M}{\partial y} dy \right] dx = \int_{x=a}^b M(x, y) \Big|_{y=Y_1(x)}^{Y_2(x)} dx \\ &= \int_a^b [M(x, Y_2) - M(x, Y_1)] dx = - \int_a^b M(x, Y_1) dx - \int_b^a M(x, Y_2) dx = - \oint_C M dx, \end{aligned}$$

luego, $\int_C M dx = - \iint_R \frac{\partial M}{\partial y} dx dy$ (1)

Figura 91

Teorema de Green



Nota: Autor (2024)t

De manera similar, sean las ecuaciones de las curvas EAF y EBF : $x = X_1(y)$ y $x = X_2(y)$, respectivamente, entonces,

$$\begin{aligned} \iint_R \frac{\partial N}{\partial x} dx dy &= \int_{y=e}^f \left[\int_{x=X_1(y)}^{X_2(y)} \frac{\partial N}{\partial x} dx \right] dy \\ &= \int_e^f [N(X_2, y) - N(X_1, y)] dy \\ &= \int_f^e N(X_1, y) dy + \int_e^f N(X_2, y) dy = \int_C N dy = \iint_R \frac{\partial N}{\partial x} dx dy \quad (2) \end{aligned}$$

Sumando (1) y (2), se obtiene entonces,

$$\int_C M dx + N dy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx dy$$

Ejemplo 5.35 Comprobar el Teorema de Green en el plano, $\int_C (xy + y^2) dx + x^2 dy$ donde C es la curva cerrada de la región limitada por $y = x$ y $y = x^2$ (ver Figura).

Solución

En la Figura se aprecia que $y = x$ y $y = x^2$ y se intersecan en $(0,0)$ y $(1,1)$, además, la dirección en que recorre C es positiva. A lo largo de $y = x^2$, la integral de línea es igual a:

$$\int_0^1 [(x)(x^2) + x^4] dx + (x^2)(2x) dx = \int_0^1 (3x^3 + x^4) dx = \frac{19}{20}$$

A lo largo de $y = x$, de $(1,1)$ a $(0,0)$, la integral de línea es igual a:

$$\int_1^0 [(x)(x) + x^2] dx + x^2 dx = \int_1^0 3x^2 dx = -1$$

luego, la integral de línea $\int_C M dx + N dy = \frac{19}{20} - 1 = -\frac{1}{20}$

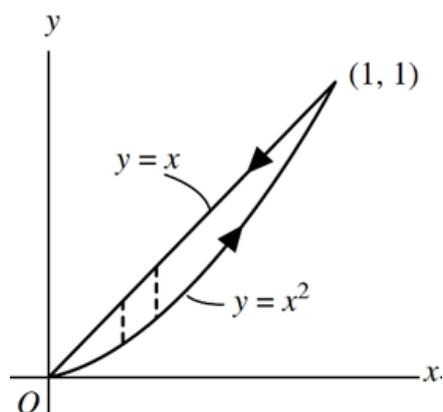
$$\begin{aligned} \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx dy &= \iint_R \left[\frac{\partial}{\partial x} (x^2) - \frac{\partial}{\partial y} (xy + y^2) \right] dx dy \\ &= \iint_R (x - 2y) dx dy = \int_{x=0}^1 \int_{y=x^2}^x (x - 2y) dy dx \end{aligned}$$

$$= \int_0^1 \left[\int_{x^2}^x (x - 2y) dy \right] dx = \int_0^1 (xy - y^2) \Big|_{x^2}^x dx = \int_0^1 (x^4 - x^3) dx = -\frac{1}{20}$$

Con lo que se verifica el teorema.

Figura 92

Teorema de Green



Nota: Autor (2024)

5.8. Problemas propuestos

- **Integrales de funciones vectoriales**

1. Sea el vector definido por $\mathbf{R}(t) = (3t^2 + 2t)\mathbf{i} + (3t - 6)\mathbf{j} + (6t^3 + 5t^2 - 4)\mathbf{k}$, se pide determinar,

a. $\int \mathbf{R}(t) dt$. Sol. $(t^3 + t^2)\mathbf{i} + \left(\frac{3}{2}t^2 - 6t\right)\mathbf{j} + \left(\frac{3}{2}t^4 + \frac{5}{3}t^3 - 4t\right)\mathbf{k} + \mathbf{C}$

b. $\int_1^2 \mathbf{R}(t) dt$. Sol. $10\mathbf{i} - \frac{3}{2}\mathbf{j} - \frac{181}{6}\mathbf{k}$

2. Hallar la integral definida por $\int ([\langle t, t^2, t^3 \rangle \times \langle t^3, t^2, t \rangle] dt) dt$

Sol. $\left(\frac{t^4}{4} - \frac{t^6}{6}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{t^7}{7} - \frac{t^3}{3}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{t^4}{4} - \frac{t^6}{6}\right)\mathbf{k} + \mathbf{C}$

3. Evaluar la integral definida por $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos 2t, \tan t, e^{-2t}) dt$

Sol. $\frac{3}{4}\mathbf{i} + \ln 2 \mathbf{j} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2\pi/3}\right)\mathbf{k}$

4. Encontrar los vectores de velocidad y posición de una partícula que tiene la aceleración, velocidad y posición iniciales dadas.

a. $\mathbf{a}(t) = (0,0,10)$, $(u_x, v_y, w_z) = (1,5,0)$, $(x_0, y_0, z_0) = (0,0,10)$

Sol. $\mathbf{v}(t) = (1, 5, 10t)$, $\mathbf{r}(t) = (t, 5t + 5, 5t^2)$

b. $\mathbf{a}(t) = (\sin t, \cos t, 1)$, $(u_x, v_y, w_z) = (0,2,0)$, $(x_0, y_0, z_0) = (0,0,0)$

Sol. $\mathbf{v}(t) = (-\cos t + 1, \sin t + 2, t)$, $\mathbf{r}(t) = (-\sin t + t, -\cos t + 2t + 1, \frac{t^2}{2})$

5. La aceleración de una partícula está dada por $\mathbf{a}(t) = 4t\mathbf{i} + 6t\mathbf{j} + \mathbf{k}$. Si la posición y velocidad inicial de la partícula es $\mathbf{r}(0) = \mathbf{i}$, $\mathbf{v}(0) = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$ donde \mathbf{r} está en metros t en segundos. Se pide determinar $\mathbf{r}(t)$ y $\mathbf{v}(t)$. Sol.

$\mathbf{v}(t) = (2t^2 + 1)\mathbf{i} + (3t^2 - 1)\mathbf{j} + (t + 1)\mathbf{k}$

$\mathbf{r}(t) = \left(\frac{2}{3}t^3 + t + 1\right)\mathbf{i} + (t^3 - t)\mathbf{j} + \left(\frac{1}{2}t^2 + t\right)\mathbf{k}$

• **Integrales de línea y campos conservativos**

1. Suponga que $\mathbf{F} = y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ y sea C la curva $y = 2x^2$ en el plano xy , se pide determinar la integral de línea $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ desde $P_1(0, 0)$ a $P_2(2, 8)$. Sol. 16.

2. Suponga que $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ y sea C la elipse rotada $\mathbf{r}(t) = 4 \cos t\mathbf{i} + 4 \sin t\mathbf{j} + 4 \cos t\mathbf{k}$ en el $0 \leq t \leq 2\pi$, se pide determinar la integral de línea $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$. Sol. 0

3. Considere $\mathbf{F} = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$, que actúa sobre el segmento dado por $P_1(1, 1, 1), P_2(8, 4, 2)$. Se pide determinar la integral de línea $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$. Sol. $3\sqrt{3}/10$

4. Determine si los siguientes campos vectoriales son conservadores en \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3 respectivamente

a. $\mathbf{F} = e^x \cos y \mathbf{i} + e^{-x} \cos y \mathbf{j}$. Sol. Es conservativo

b. $\mathbf{F} = (2x - z^2)\mathbf{i} + (x^2 + 2z)\mathbf{j} + (2y - 2xz)\mathbf{k}$. Sol. Es conservativo

5. Determine si los siguientes campos vectoriales son conservativos en la región especificada, si es así, determine la función potencial respectiva.

a. $\mathbf{F} = (y + z, x + z, x + y)$ en \mathbb{R}^3 . Sol. Es conservativo, $\phi(x, y, z) = xy + yz + xz$

b. $\mathbf{F} = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}}$ en \mathbb{R}^* . Sol. Es conservativo, $\phi(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

• **Integrales de superficie**

Encuentre el flujo de los siguientes campos vectoriales a través de la superficie dada con la orientación especificada. Puede utilizar una descripción explícita o paramétrica de la superficie.

1. Sea el campo vectorial $\mathbf{F} = (x, y, z)$ a través de la superficie inclinada del cono $z^2 = x^2 + y^2$ para $0 \leq z \leq 1$; los vectores normales apuntan hacia arriba. Sol. 0
2. Sea el campo vectorial $\mathbf{F} = \mathbf{r}/\|\mathbf{r}\|^3$ a través de la esfera de radio a centrada en el origen, donde $\mathbf{r} = (x, y, z)$; los vectores normales apuntan hacia abajo. Sol. 4π
3. $\iint_S \|\mathbf{r}\| \, dS$, donde S es el cilindro $x^2 + y^2 = 4$, para $0 \leq z \leq 8$, donde $\mathbf{r} = (x, y, z)$. Sol. $8\pi[4\sqrt{17} + \ln(\sqrt{17} + 4)]$
4. $\iint_S \frac{(x, 0, z)}{(x^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \mathbf{n} \, dS$, donde S es el cilindro $x^2 + z^2 = a^2$, para $-2 \leq y \leq 2$. Sol. $8\pi a$
5. Considere el campo vectorial $\mathbf{F} = (x, y, z)$ y el cono $z^2 = \frac{x^2 + y^2}{a^2}$, para $0 \leq z \leq 1$. Encuentre el flujo de salida (lejos del eje z), para cualquier $a > 0$. Interpretar el resultado. Sol. 0, el flujo es tangente a la superficie

• **Integrales de volumen**

1. Si $\mathbf{F} = (2z, -x, y)$, evaluar $\iiint_V \mathbf{F} \, dV$, donde V es la región del espacio limitada por $0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 4, x^2 \leq z \leq 2$. Sol. $32\mathbf{i}/15 + 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$
2. Evalúe $\iiint_V (2x + y) \, dV$, donde V es la región cerrada acotada por el cilindro: $z = 4 - x^2$, y los planos $x = 0, y = 0, y = 2yz = 0$. Sol. $80/3$.
3. Dado $\mathbf{F} = (2x^2 - 3z)\mathbf{i} - 2xy\mathbf{j} - 4x\mathbf{k}$. Evalúe a) $\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{F} \, dV$ y b) $\iiint_V \nabla \times \mathbf{F} \, dV$ donde V es la región cerrada limitada por los planos $x = y = z = 0$ y $2x + 2y + z = 4$. Sol. a. $8/3$ b) $8(\mathbf{j} - \mathbf{k})/3$
4. Dado $\phi = x^2 + yz$, y V el volumen limitado por $y = 0, x + y = 1, -1 \leq z \leq 1$ hallar la integral $\iiint_V \nabla \phi \, dV$. Sol. $\frac{2}{3}\mathbf{k}$
5. Hallar la integral $\iiint_V \nabla \times \mathbf{F} \, dV$ para el caso en que $\mathbf{F} = xz\mathbf{i} + (x^3 + y^3)\mathbf{j} - 4y\mathbf{k}$ y V es el cubo limitado por $-1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1, -1 \leq z \leq 1$. Sol. $-32\mathbf{i} + 8\mathbf{k}$

• **Teorema de la Divergencia o Teorema de Gauss**

Aplicar el Teorema de la Divergencia para calcular la integral $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ (flujo de \mathbf{F} a través de S).

1. Si $\mathbf{F} = xy^2\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + zx^2\mathbf{k}$, donde S es la superficie del sólido comprendido entre los cilindros $x^2 + y^2 = 1$ y $x^2 + y^2 = 4$ y entre los planos $z = 1$ y $z = 3$. Sol. 27π
2. Si $\mathbf{F} = xy^2\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + zx^2\mathbf{k}$, donde S es la superficie de la cilíndrica representada por $\mathbf{r} = \cos u\mathbf{i} + \sin u\mathbf{j} + v\mathbf{k} = 1, 0 \leq u \leq 2\pi, 0 \leq v \leq 1$, $d\mathbf{S} = \mathbf{n}dS$, \mathbf{n} vector unitario. Sol. 2π Hallar $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS$ siendo $\mathbf{F} = 2xy\mathbf{i} + yz^2\mathbf{j} + xz\mathbf{k}$ y S es:
3. La superficie del paralelepípedo limitado por $x = 0, y = 0, z = 0, x = 2, y = 1, z = 3$. Sol. 30
4. La superficie de la región limitada por $x = 0, y = 0, y = 3, z = 0, x + 2y = 6$. Sol. $\frac{351}{2}$
5. Si $\mathbf{F}(x, y, z) = (y + z)\mathbf{i} + (z + x)\mathbf{j} + (x + y)\mathbf{k}$, S es la superficie del cubo limitado por $x = 0, y = 0, z = 0, x = 1, y = 1, z = 1$. Calcular:
 - a. $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ b. $\iiint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{x} d\mathbf{S}$. Sol a. 0 , b. 0

• **Teorema de Stokes**

1. Confirme que el teorema de Stokes se cumple para el campo vectorial $\mathbf{F} = (z - y, x, -x)$, donde S es el hemisferio $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, para $z = 0$, y C es el círculo $x^2 + y^2 = 4$ orientado en sentido antihorario. Sol. 8π .
2. Hallar la integral de línea $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ evaluando la integral de superficie en el teorema de Stokes con una elección adecuada de S . Suponga que C tiene una orientación en sentido antihorario.
 - a. $\mathbf{F} = (2y, -z, x)$, C es el círculo $x^2 + y^2 = 12$ en el plano $z = 0$. Sol. -24π
 - b. $\mathbf{F} = (x^2 - z^2, y, 2xz)$, C es el límite del plano $z = 4 - x - y$ en el primer octante. $-128/3$
 - c. $\mathbf{F} = (y^2, -z^2, x)$, C es el círculo $\mathbf{r} = (3 \cos t, 4 \cos t, 5 \sin t)$ para $0 \leq t \leq 2\pi$. Sol. 15π

3. Evalúe la integral de línea mediante el teorema de Stokes para determinar el valor de la integral de superficie $\iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} \, dS$. Considere \mathbf{n} puntos en dirección ascendente
- $\mathbf{F} = (2y, -z, x - y - z)$, S es la parte superior del domo de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ en el plano $0 \leq x \leq 5$. Sol. 0
 - $\mathbf{F} = (y, z - x, -y)$, S es la parte del paraboloido $z = 2 - x^2 - 2y^2$ que se encuentra dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 1$. Sol. -2π
 - $\mathbf{F} = (y, 1, z)$, S es la parte de la superficie $z = 2\sqrt{x}$ que se encuentra dentro del cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. Sol. -4π

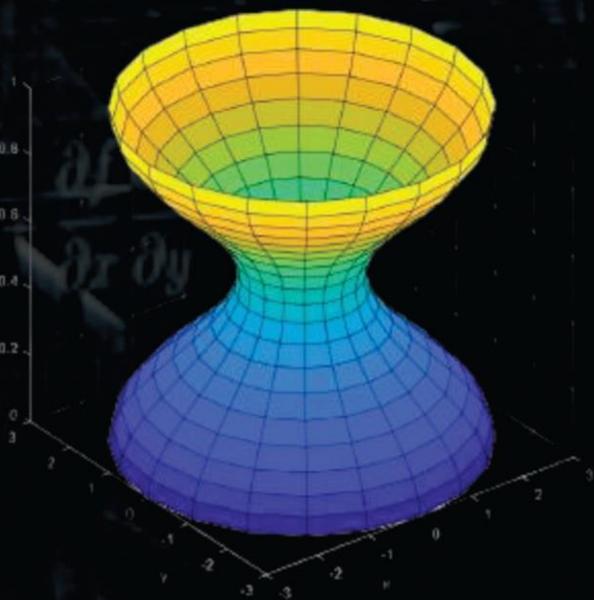
• **Teorema de Green**

4. Utilizando el teorema de Green, evaluar las siguientes integrales de línea. Considere que todas las curvas están orientadas en sentido antihorario (Un trazado es útil).
- $\oint_C (4x^3 + \sin y^2)dy - (4y^3 + \cos x^2)dx$. Sol. 96π
 - $\oint_C (3y + 1, 4x^2 + 3)dr$. donde C es la frontera del rectángulo de vértices $(0,0), (4,0), (4,2), (0,2)$. Sol. 104
 - $\oint_C xe^y dx + xdy$, donde C es la frontera de la región limitada por las curvas $y = x^2, x = 2$ y el eje x . Sol. $\frac{31-3e^4}{6}$
 - $\oint_C (2x + e^{y^2})dy - (4y^2 + e^{x^2})dx$, donde C es la frontera del cuadrado con vértices $(0,0), (1,0), (1,1), (0,1)$. Sol. 6
 - La integral de línea de circulación de $\mathbf{F} = (x^2 + y^2, 4x + y^3)$, donde C es la frontera de $\{(x, y): 0 \leq y \leq \sin x, 0 \leq x \leq \pi\}$. Sol. $8 - \frac{\pi}{2}$.

CAPITULO 06

Capitulo VI: Anexos

ANEXOS



Anexos

A.1. Lista de símbolos

Símbolo	Significado	Ejemplo
$d\phi$	Diferencial total de la función ϕ	$d(\phi) = \frac{\partial\phi}{\partial x}(dx) + \frac{\partial\phi}{\partial y}(dy) + \dots$
∂x	Derivada parcial de la variable x	$\frac{\partial\phi}{\partial x} dx \leq d\phi$
$f_x, \frac{\partial f}{\partial x}$	Derivada parcial de f en términos de x .	$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}$
$f_x^{(n)}, \frac{\partial^n f}{\partial x^n}$	Derivada parcial enésima de f en términos de x	$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)$
$\nabla\phi \cdot \mathbf{a}_u$	Derivada direccional de ϕ con respecto a la dirección \mathbf{a}	$D_A(\phi) = \nabla\phi \cdot \mathbf{a}_u$
$\nabla\phi$	Gradiente de la función ϕ	$\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\mathbf{k}$
$\nabla^2\phi = \Delta\phi$	Laplaciano de la función ϕ	$\nabla^2\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$
$\nabla \cdot \mathbf{f}$	Divergencia del campo vectorial \mathbf{f}	$\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}$
$\nabla \times \mathbf{f}$	Rotacional del campo vectorial \mathbf{f}	$\nabla \times \mathbf{f} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix}$
$\int_C \phi(\mathbf{r}) dS$	Integral de línea de la función ϕ a lo largo de la curva C (bajo parametrización \mathbf{r})	$\int_C \phi(\mathbf{r}) dS = \int_a^b \phi(\mathbf{r}(t)) \mathbf{r}'(t) dt$
$\oint_C \phi(z) dz$	Integral de contorno de la función ϕ a lo largo de la curva C	$\int_\gamma \phi(z) dz = \int_a^b \phi(\gamma(t)) \gamma'(t) dt$
$\int_C \mathbf{f}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$	Integral de línea del campo vectorial \mathbf{f} a lo largo de la curva C	$\int_C \mathbf{f}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{f}(\mathbf{r}(t)) \mathbf{r}'(t) dt$

$\iint_D \phi dA$	Integral de área de una función ϕ sobre el dominio D.	$\iint_D \phi dA = \iint_{[0,1] \times [0,1]} \phi(x,y) dA$
$\iint_D \phi(\mathbf{r}) dS$	Integral de superficie de una función ϕ sobre un dominio D (bajo parametrización \mathbf{r})	$\iint_D \phi(\mathbf{r}) dA = \int_a^b \int_c^d \phi(\mathbf{r}(s,t))$
$\iiint_V \phi dV$	Integral de volumen de una función ϕ sobre el dominio V	$\iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq R^2} 1 dV = \frac{4}{3} \pi R^3$

A.2. Resumen de fórmulas empleadas en el texto

Distancia entre dos puntos en el espacio

- La distancia entre los puntos $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$ viene dada por:

$$|P_1 P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

- Ecuación de una esfera

La ecuación de una esfera con centro (x_0, y_0, z_0) y radio r viene dada por:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$$

- Operaciones con los vectores en el espacio

Si \mathbf{A} , \mathbf{B} y \mathbf{C} son vectores y c y d son escalares:

- $\mathbf{A} + \mathbf{B} = (A_1 + B_1)\mathbf{i} + (A_2 + B_2)\mathbf{j} + (A_3 + B_3)\mathbf{k}$;
- $c\mathbf{A} = cA_1\mathbf{i} + cA_2\mathbf{j} + cA_3\mathbf{k}$
- $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$; $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}$; $\mathbf{A} \cdot (c\mathbf{B}) = (c\mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} = c(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$
- $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3$
- $\cos \theta = \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{\|\mathbf{A}\| \|\mathbf{B}\|} = \frac{A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3}{\sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2} \sqrt{B_1^2 + B_2^2 + B_3^2}}$
- $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} = (A_2B_3 - A_3B_2)\mathbf{i} + (A_3A_1 - A_1A_3)\mathbf{j} + (A_1A_2 - A_2A_1)\mathbf{k}$
- $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix}$

• **Vector unitario**

Un vector unitario es un vector cuya longitud es 1. El vector unitario \mathbf{A}_u en la misma dirección que \mathbf{a} está dado por:

$$\mathbf{A}_u = \frac{\mathbf{A}}{\|\mathbf{A}\|} = \left(\frac{A_1}{\sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}}, \frac{A_2}{\sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}}, \frac{A_3}{\sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}} \right)$$

• **Cosenos directores**

Los cosenos directores nos dan la información de cómo se orienta el vector \mathbf{A} , presenta las siguientes relaciones básicas con respecto a los ejes coordenados:

$$\cos \alpha = \frac{A_1}{\|\mathbf{A}\|}; \cos \beta = \frac{A_2}{\|\mathbf{A}\|}; \cos \theta = \frac{A_3}{\|\mathbf{A}\|}; \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \theta = 1$$

• **Rectas y planos en \mathbb{R}^3**

a. Ecuación de la recta: $x = x_0 + v_1t, y = y_0 + v_2t, z = z_0 + v_3t, \frac{x-x_0}{v_1} =$

$$\frac{y-y_0}{v_2} = \frac{z-z_0}{v_3}$$

b. Ecuación vectorial del plano: $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$

c. Ecuaciones paramétricas del plano:

$$\begin{cases} x = x_0 + v_1t + u_1s \\ y = y_0 + v_2t + u_2s \\ z = z_0 + v_3t + u_3s \end{cases}$$

d. Angulo entre planos: $\cos \theta = \frac{|\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2|}{\|\mathbf{n}_1\| \|\mathbf{n}_2\|}$

e. Distancia de un punto a un plano: $d_{PQ\pi} = |\text{proy}_{\mathbf{n}} \mathbf{PQ}| = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$

f. Distancia de un punto a una recta: $d_{PQl} = \frac{\|\mathbf{PQ} \times \mathbf{u}\|}{\|\mathbf{u}\|}$

• **Superficies o cuádricas comunes en el espacio**

a. Elipsoide: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

b. Hiperboloide de una hoja: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

c. Cono elíptico: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$

d. Paraboloides elíptico: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - z = 0$

e. Paraboloides hiperbólico: $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} - z = 0$

f. Superficies cuadráticas: $Ax^2 + Bx^2 + Cx^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + K = 0$

• **Conversión de coordenadas**

a. Rectangulares \rightarrow Cílicas: $x = r \cos \theta$; $y = r \sin \theta$; $z = z$

b. Cílicas \rightarrow Rectangulares: $r^2 = x^2 + y^2$; $\tan \theta = y/x$; $z = z$

c. Rectangulares \rightarrow Esféricas: $x = \rho \sin \phi \cos \theta$; $y = \rho \sin \phi \sin \theta$; $z = \rho \cos \theta$

d. Esféricas \rightarrow Rectangulares: $\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$; $\tan \theta = \frac{y}{x}$;

$$\phi = \cos^{-1} \left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right)$$

• **Funciones vectoriales**

a. Rango de una función: $\text{Rng } \mathbf{f}(t) = \{z(t) = f(x(t), y(t)): (x(t), y(t)) \in \text{Dom } f(t) \subset \mathbb{R}\}$

b. Límite de una función: $\lim_{t \rightarrow a} \mathbf{r}(t) = \left\{ \lim_{t \rightarrow a} f(t), \lim_{t \rightarrow a} g(t), \lim_{t \rightarrow a} h(t) \right\}$

c. Derivada de una función: $\mathbf{r}'(t) = f'(t)\mathbf{i} + g'(t)\mathbf{j} + h'(t)\mathbf{k} = (f'(t), g'(t), h'(t))$

d. Integral de una función: $\int_a^b \mathbf{r}(t) dt = \int f(t) dt \mathbf{i} + \int g(t) dt \mathbf{j} + \int h(t) dt \mathbf{k} =$

$$\mathbf{R}(t) \Big|_a^b = \mathbf{R}(b) - \mathbf{R}(a)$$

e. Velocidad y aceleración: $\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t)$, $\mathbf{a}(t) = \mathbf{v}'(t) = \mathbf{r}''(t)$

f. Componente tangencial aceleración: $a_T(t) = \mathbf{a}(t) \cdot \mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{a}(t) \cdot \mathbf{v}(t)}{\|\mathbf{v}(t)\|} = \frac{d^2s}{dt^2}$

g. Componente normal aceleración: $a_N(t) = \mathbf{a}(t) \cdot \mathbf{N}(t) = \sqrt{\|\mathbf{a}(t)\|^2 - a_T^2} = k \left(\frac{ds}{dt} \right)^2$

h. Longitud de una curva: $L_C = \int_a^b \|\mathbf{r}'(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2 + [h'(t)]^2} dt$

i. Ecuación del plano tangente: $z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$

j. Vector normal unitario: $\mathbf{N}(t) = \frac{\mathbf{T}'(t)}{\|\mathbf{T}'(t)\|}$

k. Vector binormal: $\mathbf{B}(t) = \mathbf{T}(t) \times \mathbf{N}(t)$

l. Vector curvatura: $\mathbf{K}(t) = \frac{\mathbf{T}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|}$

m. Radio de curvatura: $k(t) = \frac{\|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|^3} = \frac{\|\mathbf{r}''(t)\|}{\|(1+f'(t))^2\|^{\frac{3}{2}}}$

n. Plano osculador: $\mathbf{B}(t_0)[(x, y, z) - (x_0, y_0, z_0)] = 0$

o. Plano normal: $\mathbf{T}(t_0)[(x, y, z) - (x_0, y_0, z_0)] = 0$

p. Plano rectificante: $\mathbf{N}(t_0)[(x, y, z) - (x_0, y_0, z_0)] = 0$

• **Funciones de varias variables**

a. Derivadas parciales: $f_x(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$, $f_y(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$,

b. Derivadas parciales superiores: $f_{xx}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y)$, $f_{yy}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y)$,

c. Regla de la cadena: $\frac{d(u)}{d(t)} = \frac{\partial u}{\partial x} \left(\frac{dx}{dt}\right) + \frac{\partial u}{\partial y} \left(\frac{dy}{dt}\right) + \frac{\partial u}{\partial z} \left(\frac{dz}{dt}\right)$

d. Derivada implícita: $F_x(x, y) \frac{dx}{dx} + F_y(x, y) \frac{dy}{dx} = 0 \rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}$

e. Gradiente: $\nabla\phi = \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right)\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\mathbf{k}$

f. Derivada direccional: $D_{\mathbf{A}_u}(\phi) = \nabla f(x, y) \cdot \mathbf{A}_u = \nabla\phi \cdot \mathbf{A}_u$

g. Diferencial total: $df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$

• **Prueba de máximos y mínimos mediante la segunda derivada:**

Sea $D = f_{xx}(a, b)f_{yy}(a, b) - (f_{xy}(a, b))^2$

a. Si $D > 0$ y $f_{xx}(a, b) > 0$ entonces $f(a, b)$ es un mínimo local

b. Si $D > 0$ y $f_{xx}(a, b) < 0$ entonces $f(a, b)$ es un máximo local

c. Si $D < 0$ y $f_{xx}(a, b) > 0$ entonces $f(a, b)$ es un punto de silla

Multiplicadores Lagrange: $f_x(x, y) = \lambda g_x(x, y)$, $f_y(x, y) = \lambda g_y(x, y)$, $g(x, y) = d$

en general, $\nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z)$ y $g(x, y) = d$

Divergencia: $\nabla \cdot \mathbf{V} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right) \cdot (V_1\mathbf{i} + V_2\mathbf{j} + V_3\mathbf{k}) = \frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial y} + \frac{\partial V_3}{\partial z}$

Integrales iteradas: $\iint_R f(x, y) dA = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy\right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx\right) dy$

Área de una superficie paramétrica: $\iint_S dA = \iint_D \|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\| dS$

Integrales dobles polares: $\iint_R f(x, y) dA = \int_\alpha^\beta \int_{g_1}^{g_2} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta$

Integral triple rectangular: $\iiint_E f(x, y, z) dV = \int_r^s \int_c^d \int_a^b f(x, y, z) dx dy dz$

l. Integral triple en coordenadas polares:

$$\iiint_E f(x, y, z) dV = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)} \int_{u_1(r \cos \theta, r \sin \theta)}^{u_2(r \cos \theta, r \sin \theta)} r f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) dz dr d\theta$$

m. Integral triple en coordenadas esféricas:

$$\iiint_E f(x, y, z) dV = \int_{\delta}^{\gamma} \int_{\alpha}^{\beta} \int_a^b \rho^2 \sin \varphi f(\rho \sin \varphi \cos \theta, \rho \sin \varphi \sin \theta, \rho \cos \varphi) d\rho d\theta d\varphi$$

• **Centros de masa y momento de inercia en el plano**

Eje x: $\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{\rho \int_a^b x[f(x)-g(x)]dx}{\rho \int_a^b [f(x)-g(x)]dx} = \frac{1}{A} \int_a^b x[f(x) - g(x)]dx$

Eje y: $\bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{\rho \int_a^b \frac{1}{2}([f(x)]^2 - [g(x)]^2)dx}{\rho \int_a^b [f(x)-g(x)]dx} = \frac{1}{A} \int_a^b \frac{1}{2}([f(x)]^2 - [g(x)]^2)dx$

Inercia: $M_x = \rho \int_a^b \frac{1}{2}([f(x)]^2 - [g(x)]^2)dx, \quad M_y = \rho \int_a^b x[f(x) - g(x)]dx$

• **Centro de gravedad y centroide en el espacio**

Centro de gravedad $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ de un sólido E Centroides $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ de un sólido E

$$\bar{x} = \frac{1}{M} M_{yz} = \frac{1}{M} \iiint_E x \rho(x, y, z) dV$$

$$\bar{x} = \frac{1}{V} \iiint_E x dV$$

$$\bar{y} = \frac{1}{M} M_{xz} = \frac{1}{M} \iiint_E y \rho(x, y, z) dV$$

$$\bar{y} = \frac{1}{V} \iiint_E y dV$$

$$\bar{z} = \frac{1}{M} M_{xy} = \frac{1}{M} \iiint_E z \rho(x, y, z) dV$$

$$\bar{z} = \frac{1}{V} \iiint_E z dV$$

• **Matriz Jacobiana**

$$J_f(x, y, z) = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla f_x \\ \nabla f_y \\ \nabla f_z \end{pmatrix}$$

• **Integración vectorial**

a. Integrales de línea: $\int_{P_1}^{P_2} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_C A_1 dx + A_2 dy + A_3 dz$

b. Integral de superficie: $\iint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS = \iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dS = \iint_R \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \frac{dx dy}{\|\mathbf{n} \cdot \mathbf{k}\|}$

c. Integral de volumen: $\iiint_V \mathbf{A} dV = \iiint_V (\nabla \times \mathbf{F}) dV$

Teorema de la Divergencia:

$$\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = \oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_V \text{div } \mathbf{A} dV$$

Teorema de Stokes: $\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n} dS = \iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S}$

Teorema de Green: $\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) dS = \oint_C M dx + N dy = \iint_S \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx dy$



The background features a dark, textured surface resembling a chalkboard, filled with various mathematical equations and symbols in a light, faded color. Some visible formulas include a rational function $\frac{px+q}{((x-a)^2+b^2)^n}$, a double integral $\iint p(x,y,z) dx dy dz = \sum_{i=1}^n y_i \cdot p$, and a stress tensor equation $\sigma_{ij(x,y)} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \sigma_x + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \sigma_y + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} \sigma_{xy}$.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Referencias Bibliográficas

- Aranda, E., Pedregal, P. (2013). Problemas de cálculo vectorial. Universidad de Castilla - La Mancha. España.
- Beltrán, A., Ugarte, F. (2007). Cálculo vectorial y series de potencias. Pontificia Universidad Católica del Perú. Lima-Perú.
- Briggs, W., Cochran, L., Gillett, B., & Schulz, E. (2011). Calculus: Early transcendentals. Boston, MA.
- Duarte, J., Favareto, M. (2016). Cálculo Vetorial e Geometria Analítica. Universidade Federal da Paraíba. Brasil.
- Guichard, D. (2020). Single and Multivariable Calculus Early Transcendentals. Creative Commons. United States.
- Herman, E., Strang, G. (2018). Calculus Volume 3. Openstax. USA.
- Lang, S. (2012). Calculus of Several Variables. Springer.
- Larson, R. (2014). Calculus, 10th Edition. 10a. Edición. Cengage Learning Editores. New York.
- Malakhaltsev, M. A., & Arteaga Bejarano, J. R. (2013). Cálculo vectorial. Cengage Learning Editores, S.A. de C.V. Mexico.
- Marsden, J. E., & Tromba, A. (2012). Vector calculus. Macmillan. 2nd Edition. Freeman and Company, New York.
- Meza, M. (2011). Cálculo III. Editorial Thales. Perú. Mora-Flores, W. (2012). Cálculo en varias variables. Instituto Tecnológico de Costa Rica
- Muentes, J. (2023). Un curso de cálculo vectorial. Universidad Tecnológica de Bolívar. Panamericana Formas e Impresos S.A. Colombia.
- Musa, S. (2023). Multivariable and vector calculus. Mercury learning and information. New Delhi.
- Ruiz, C. P. (1995). Cálculo vectorial. Prentice-Hall Hispanoamericana. Spiegel, M. (2011). Análisis vectorial. Mcgraw-Hill México.
- Silva, A., Matos, M. (2015). Cálculo de varias variáveis. Federal University of Paraíba. Brasil.
- Slougher, D. (2023). The Calculus of Functions of Several Variables. California State University. United States.
- Stephens, R. (2013). Vector Algebra and Calculus. Lectures MT 2013. England.
- Stewart, J. (2020). Cálculo de varias variables. Trascendentes tempranas. 9a. Edición. Cengage Learning Editores, S.A. de C.V. Mexico.

Referencias:

- Thomas, G. B., Weir, M. D., & Hass, J. (2014). Cálculo. Pearson Educación.
- Venero, A. (2012). Matemática III. 2a. Edición. Imprenta Top Job. Perú.
- Zill, D., & Wright, W. (2011). Cálculo de varias variables (Cuarta edición). McGraw-Hill. México.

RESUMEN

El presente libro es una herramienta esencial para estudiantes de ingeniería que se inician en el estudio del Cálculo Vectorial, con el objetivo de proporcionar una comprensión sólida de los conceptos fundamentales del cálculo de varias variables y sus aplicaciones prácticas en ingeniería. Está estructurado en cinco unidades que comienzan con los fundamentos del cálculo vectorial, como la representación de puntos y vectores en el espacio, operaciones vectoriales, ecuaciones de rectas y planos, y geometría tridimensional. Estos fundamentos establecen una base para el estudio de temas más avanzados. La segunda unidad explora funciones vectoriales, abarcando el estudio de curvas en el espacio y campos vectoriales, con aplicaciones en física, lo que ayuda a los estudiantes a modelar y analizar fenómenos físicos con herramientas matemáticas. La tercera unidad se centra en el cálculo diferencial, cubriendo derivadas parciales, gradiente, divergencia y rotacional, además de la optimización de funciones de varias variables con multiplicadores de Lagrange. Esta parte es crucial para la resolución de problemas de optimización en ingeniería. La cuarta unidad aborda el cálculo integral, incluyendo integrales múltiples, cambio de variables y los teoremas de Green, Stokes y Gauss, esenciales para calcular volúmenes, áreas y flujos en problemas ingenieriles. La metodología del libro se basa en un aprendizaje simplificado, con explicaciones claras y concisas, y evita formalismos excesivos. Los numerosos ejemplos prácticos y ejercicios, tanto resueltos como propuestos, permiten a los estudiantes aplicar conceptos teóricos a problemas reales, reforzando su aprendizaje. Dirigido a estudiantes de ingeniería de la Universidad Técnica Estatal de Quevedo, especialmente a aquellos en el curso de Cálculo Vectorial, este libro es un recurso invaluable para profundizar en el campo del cálculo vectorial y sus aplicaciones en ingeniería.

Palabras Clave: Cálculo vectorial, funciones vectoriales, derivadas parciales, integrales múltiples, matriz jacobiana, teoremas de Green, Stokes y Gauss.

Abstract

This book is an essential tool for engineering students who are new to the study of Vector Calculus, with the objective of providing a solid understanding of the fundamental concepts of the calculus of several variables and its practical applications in engineering. It is structured in five units that begin with the fundamentals of vector calculus, such as the representation of points and vectors in space, vector operations, equations of lines and planes, and three-dimensional geometry. These fundamentals establish a foundation for the study of more advanced topics. The second unit explores vector functions, covering the study of curves in space and vector fields, with applications in physics, which helps students model and analyze physical phenomena with mathematical tools. The third unit focuses on differential calculus, covering partial derivatives, gradient, divergence and rotational, as well as optimization of functions of several variables with Lagrange multipliers. This part is crucial for solving optimization problems in engineering. The fourth unit deals with integral calculus, including multiple integrals, change of variables and Green's, Stokes' and Gauss' theorems, essential for calculating volumes, areas and flows in engineering problems. The methodology of the book is based on simplified learning, with clear and concise explanations, and avoids excessive formalisms. The numerous practical examples and exercises, both solved and proposed, allow students to apply theoretical concepts to real problems, reinforcing their learning. Aimed at engineering students at the State Technical University of Quevedo, especially those in the Vector Calculus course, this book is an invaluable resource for further study in the field of vector calculus and its applications in engineering.

Keywords: Vector calculus, vector functions, partial derivatives, multiple integrals, Jacobian matrix, Green's, Stokes and Gauss theorems.



<http://www.editorialgrupo-aea.com>



[Editorial Grupo AeA](#)



[editorialgrupoea](#)



[Editorial Grupo AEA](#)

ISBN: 978-9942-651-44-0



9 789942 651440